

---

---

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS E INGENIERÍA**  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN INGENIERÍA Y CIENCIAS  
APLICADAS

**“SIMULACION POR ELEMENTO FINITO DEL  
CRECIMIENTO DE UNA GRIETA MEDIANTE METODOS  
DE LA MECANICA DE LA FRACTURA ELASTICO LINEAL”**

Tesis Profesional para Obtener el Grado de  
LICENCIATURA EN INGENIERÍA MECANICA

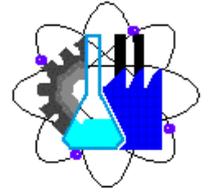
Presenta

JUAN CARLOS CHEVEZ LABASTIDA

Asesor Interno: Dr. Sergio Alonso Serna Barquera  
CIICAp-UAEM  
Departamento Materiales

Asesor Externo: Dr. Marco Antonio Cruz Chávez  
CIICAp-UAEM  
Departamento Cómputo

Cuernavaca, Morelos Abril 2007



## CAPÍTULO 2

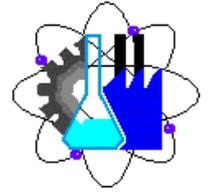
### METODO DEL ELEMENTO FINITO

#### *1.1 ¿Qué es el Método de Elemento Finito?*

El método de los elementos finitos (MEF en castellano o FEM en inglés) es una técnica matemática computacional útil para obtener soluciones numéricas aproximadas de las ecuaciones abstractas del cálculo que predice la respuesta de sistemas físicos sujetas a influencias externas, surgió como tal en la década de los 60`s, desde entonces a la fecha ha pasado de ser una herramienta novedosa a necesaria tanto a nivel académico como la industrial. Se le ha aplicado en casi todos los campos del saber con éxito, alcanzando sus mayores aplicaciones en el campo de la ingeniería. Las aplicaciones van desde el análisis por deformación y esfuerzo de automóviles, aeronaves, edificios y estructuras de puentes hasta el análisis de los campos del flujo de calor, de fluidos, magnético, filtraciones y otros problemas de flujo. Con los avances en la tecnología de las computadoras y de los sistemas CAD. Pueden modelarse problemas complejos con relativa facilidad. En una computadora pueden probarse varias configuraciones alternas antes de construir el primer prototipo. Todo esto sugiere que debemos modernizarnos empleando estos desarrollos para entender la teoría básica, las técnicas de modelado y los aspectos computacionales del método del elemento finito.

La idea básica del método del elemento finito se origina gracias a los avances en el análisis estructural de las aeronaves. En 1941, Hrenikoff presentó una solución de problemas de la elasticidad usando el “método de trabajo del marco”. Para 1943, Courant utiliza la interpolación polinomial por partes sobre subregiones triangulares para modelar problemas de torsión. Turner y otros investigadores obtuvieron matrices de rigidez para armaduras, vigas y otros elementos presentando sus hallazgos en 1956. Clough fue el primero en cuñar y emplear el termino *Elemento Finito* en 1960.

El concepto básico de este método es el de dividir el cuerpo, estructura o dominio (medio continuo) en una serie de subdominios no intersectantes entre sí en un numero finito de elementos (de allí el nombre), es decir se discretiza un conjunto de elementos finitos. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados **nodos**, estos se encuentran en las fronteras de los elementos generando a su vez un sistema. Se le llama sistema al conjunto



de elementos unidos entre si mediante nodos, y se dice que dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito, además un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos, el conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se llama *malla*.

## ***1.2 Beneficios de usar elemento finito***

El más obvio beneficio es que el FEM puede proporcionar soluciones a muchos problemas complicados que serían intratables por otras técnicas. Esto a aparecido en los campos de la mecánica y la ingeniería estructural; de hecho es generalmente reconocido que sobre el último cuarto de siglo el FEM ha producido una revolución en estos campos. Ahora parece que similares revoluciones en el horizonte de FEM continúa proyectarse a otras disciplinas.

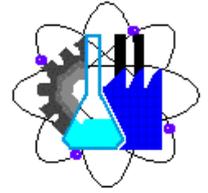
## ***1.3 Descripción de conceptos y terminología en problemas de elemento finito.***

Definiremos cuatro conceptos: *sistema*, *dominio*, *ecuación gobernante*, y *condiciones de carga*. Las definiciones serán descritas mas tarde en forma matemática.

***El Sistema*** es típicamente pero no necesariamente un objeto físico compuesto de varios materiales: sólidos, líquidos, gases, plasmas, o una combinación de ellos. Por ejemplo un sistema estructural estaría compuesto de materiales sólidos. Un ejemplo simple sería un eslabonamiento mecánico; un ejemplo complicado sería un aeroplano completo, Un sistema acústico involucra fluidos, tal como el cuerpo del agua o aire en el cual las ondas de presión (acústica) se propagan. Un sistema electromagnético podría involucrar materiales y/o espacio vacío.

***El dominio de un problema*** es típicamente la región del espacio ocupado por el sistema. Ello podría ser el intervalo de tiempo durante el cual el cambio en el sistema toma lugar. Matemáticamente hablando, es la región o intervalo de las variables independientes las cuales son usualmente (pero no necesariamente) espacio y tiempo. Sin embargo en muchas aplicaciones el dominio se referirá a sólo alguna de las variables independientes (usualmente espacio, pero no tiempo).

***Las ecuaciones gobernantes*** podrían ser ecuaciones diferenciales expresando una conservación o balance de alguna propiedad física tal como masa, momento o energía. Estas podrían ser



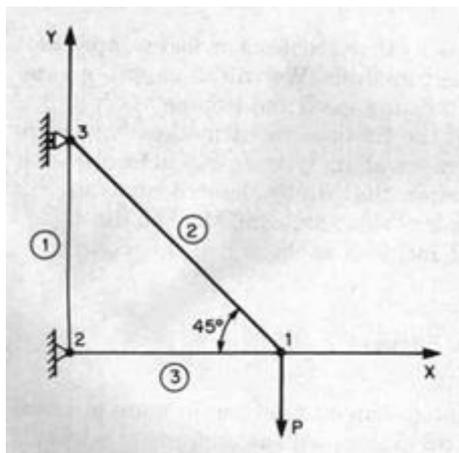
ecuaciones integrales expresando un principio variacional, tal como la minimización de energía potencial para sistemas mecánicos conservativos. Ellas también incluyen ecuaciones constitutivas, las cuales describen el comportamiento particular de los materiales tipo; estas ecuaciones contienen experimentalmente determinadas propiedades físicas (constantes físicas) de los materiales que constituyen el sistema.

**Condiciones de carga** están externamente originando fuerzas, temperaturas, corrientes, campos, etc. que interactúan con el sistema, causando que el estado del sistema cambie. Las cargas que actúan en el interior del dominio nosotros les llamaremos *cargas interiores* (alguna gente prefiere llamarlas cargas de volumen), aparecen como parte de ecuaciones gobernantes. Cargas actuando en la frontera del dominio, les llamaremos *cargas frontera*, aparecen en ecuaciones aparte llamadas *condiciones frontera*.

### 1.4 Teoría del análisis finito del elemento

El método más eficiente de aprender está por ejemplo. Por lo tanto, quisiera presentar un problema simple de FEA: el caso de un braguero con tres miembros. El método de solución a este problema debe demostrar los conceptos básicos de FEA que estén presentes en cualquier análisis.

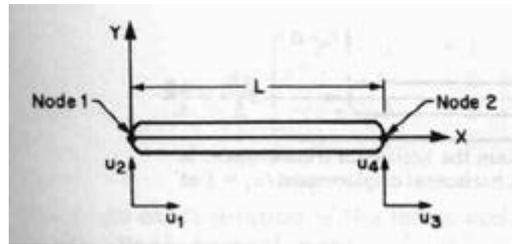
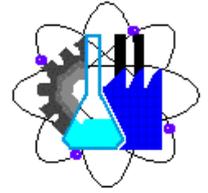
Ejemplo:



El objetivo total de nuestro análisis será determinar las dislocaciones de los miembros del braguero dados la carga P.

La primera cosa que debemos hacer es elegir nuestros **elementos**. Para nuestra situación esto es fácil: cada miembro del braguero debe ser un elemento. La división adicional no lograría nada, puesto que cada miembro del braguero puede apoyar solamente cargas axiales.

Ahora examinemos a un solo miembro del braguero:



Los nodos están situados en cada extremo de la barra, que puede tener dislocaciones en las direcciones de x y de y. Las dislocaciones son  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , y  $u_4$  denotados. Las fuerzas correspondientes debido a estas dislocaciones son  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , y  $F_4$ . La barra tiene un área seccionada transversalmente uniforme  $A$  y módulo de Young  $E$ . La relación general entre la fuerza y la dislocación es  $F_i = k_{ij} \cdot u_j$ , donde está la fuerza el  $F_i$  en la dirección  $i$ ,  $u_j$  es la dislocación en la dirección  $j$ , y el  $k_{ij}$  es el coeficiente de la “tiesura” que relaciona el  $F_i$  con el  $u_j$ . En nuestro ejemplo particular de un elemento horizontal del braguero, tenemos el sistema siguiente de ecuaciones:

$$F_1 = k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + k_{13}u_3 + k_{14}u_4$$

$$F_2 = k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4$$

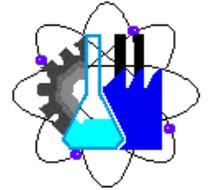
$$F_3 = k_{31}u_1 + k_{32}u_2 + k_{33}u_3 + k_{34}u_4$$

$$F_4 = k_{41}u_1 + k_{42}u_2 + k_{43}u_3 + k_{44}u_4$$

Alternativamente, en forma de la matriz:

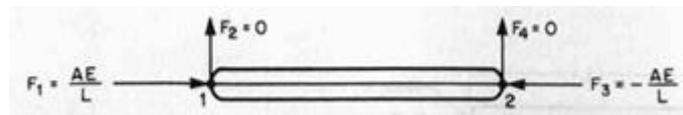
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

El  $k_{ij}$  de la matriz se llama la “matriz de la tiesura.” Es la matriz que define las características geométricas y materiales de la barra. Las matrices de la tiesura son una parte fundamental de FEA. Estas matrices definen siempre las características inherentes del sistema que es estudiado. Para el sistema actual, necesitamos determinar la matriz de la tiesura. La manera que iremos sobre hacer esto puede parecerse una poco extraña al principio, pero intenta seguir el razonamiento mientras que tiene sentido. Comencemos asumiendo  $u_1 = 1$  y  $u_2 = u_3 = u_4 = 0$ . Entonces nuestra matriz toma la forma:



$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \end{bmatrix} (u_1)$$

Cada fuerza  $F_i$  es igual a  $k_{ij}$ . Ahora, memoria de mecánicos de los materiales por los cuales la dislocación de una barra es dada  $u = FL/AE$ . Con la dislocación  $u_1 = 1$ , fuerza 1 está  $F_1 = AE/L$ . Para mantener equilibrio, debemos también tener una fuerza  $F_3 = -AE/L$ :



Desde el igual de nuestro  $F_i$  nuestro  $k_{i1}$ , tenemos:

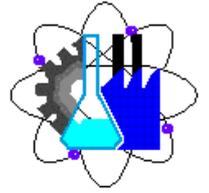
$$k_{i1} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} \\ 0 \\ -\frac{AE}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Él importante recordar que nuestro elemento puede apoyar solamente cargas axiales. Por lo tanto, las dislocaciones  $u_2$  y  $u_4$  no pueden dar lugar a tensiones en la barra puesto que estas dislocaciones son perpendiculares al eje de la barra. Así, los coeficientes de la tiesura de estas dislocaciones deben ser cero:  $k_{i2} = k_{i4} = 0$ . Finalmente, una dislocación  $u_3 = 1$  dará lugar a fuerzas apenas frente a éstas de  $u_1 = 1$ , tan  $k_{i3} = -k_{i1}$ . Nuestra matriz de la tiesura es:

$$k_{ij} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

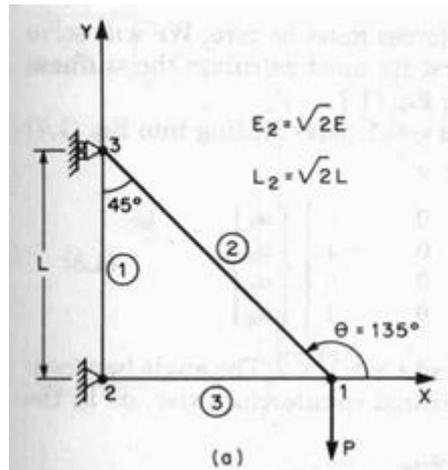
Debe ser acentuado que la matriz de la tiesura apenas derivada es solamente válida para las barras paralelas al x-axis. Con una derivación similar puede ser demostrado que la matriz de la tiesura para cualquier en ángulo “theta orientada barra” al x-axis está:

$$k_{(i,j)} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}$$

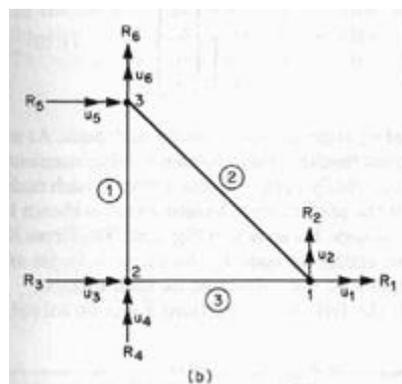


donde  $c = \cos \theta$  y  $s = \sin \theta$ . Observar que cuando la  $\theta = 0$ , esta matriz de la ticsura reduce a la derivamos para una barra horizontal.

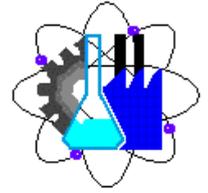
Ahora sabiendo la matriz de la ticsura para cualquier barra axialmente cargada, podemos aplicarla a una situación verdadera con cantidades específicas. Considerar el braguero siguiente:



Las dislocaciones y las fuerzas externas son:



Observar los símbolos que estamos utilizando:  $R$  es una fuerza externa en el braguero;  $F$  es una fuerza interna resultando de las tensiones impuestas ante la estructura durante una dislocación. Sabiendo las orientaciones de cada elemento, podemos instalar las matrices para ellas. Usando  $\theta = 90$  grados para el elemento 1,  $\theta = 135$  grados para el elemento 2, y  $\theta = 0$  grados para el elemento 3 obtenemos las matrices siguientes:



$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

Elemento 1:

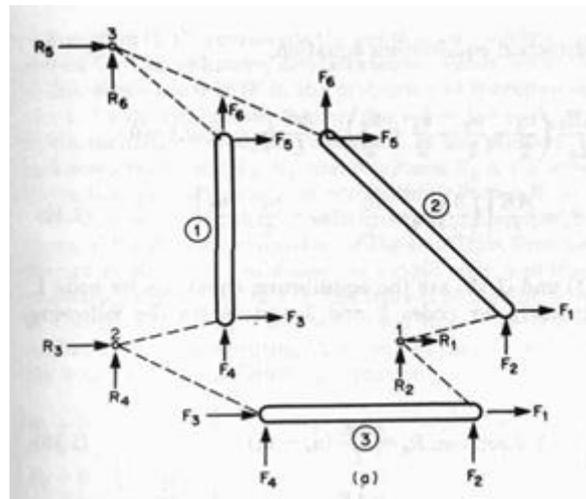
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \frac{AE_2}{2L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

Elemento 2:

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Elemento 3:

Podemos ahora generar un sistema de las ecuaciones del equilibrio para cada nodo. Considerar la figura siguiente:



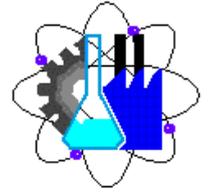
Las fuerzas nodales (que resultan de dislocaciones del elemento) deben ser iguales y frente a las fuerzas externamente aplicadas. Observar que hacemos todas las fuerzas dibujar en direcciones positivas de x y de y. Así, para el equilibrio en el nodo 1:

$$X \text{ - dirección: } R_2 - F_2 \text{ (element3)} - F_1 \text{ (element2)} = 0$$

$$Y \text{ - dirección: } R_1 - F_1 \text{ (element3)} - F_2 \text{ (element2)} = 0$$

Deseamos solucionar para R1 y R2. Obteniendo las fuerzas nodales  $F_2 \text{ (element3)}$ ,  $F_2 \text{ (element2)}$ ,  $F_1 \text{ (element3)}$ , y  $F_1 \text{ (element2)}$  de nuestras matrices previamente resueltas conseguimos:

$$R_1 = AE/L (3u_1/2 - u_2/2 - u_3 - u_5/2 + u_6/2)$$



$$R_2 = AE/L (-u_1/2 + u_2/2 + u_5/2 - u_6/2).$$

Semejantemente, del equilibrio de los nodos 2 y 3 obtenemos:

$$R_3 = AE/L (-u_1 + u_3)$$

$$R_4 = AE/L (u_4 - u_6)$$

$$R_5 = AE/L (-u_1/2 + u_2/2 + u_5/2 - u_6/2)$$

$$R_6 = AE/L (u_1/2 - u_2/2 - u_4 - u_5/2 + 3u_6/2)$$

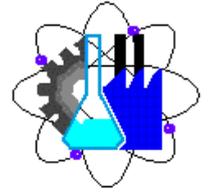
Podemos ahora combinar todas nuestras fuerzas externas en una matriz:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

Ahora recordar lo que estamos intentando hacer aquí: dado una carga  $P$ , deseamos solucionar para las dislocaciones en cada nodo. La observación de que el nodo 2 está fijado y de que el nodo 3 está en un rodillo, las dislocaciones  $u_3$ ,  $u_4$ , y  $u_5$  deben igualar 0. Estos valores son absolutamente importantes porque sin ellos no podríamos solucionar el problema. De hecho, los valores tales como éstos se necesitan siempre en análisis finitos del elemento; se conocen como “[condiciones de límite](#).” Después, debemos indicar las reacciones que se saben de nuestro cargamento particular. Podemos ver del braguero que  $R_1 = 0$ ,  $R_2 = -P$ , y  $R_6 = 0$ . Incorporando las dislocaciones y las reacciones sabidas en nuestra matriz conseguimos:

$$\begin{Bmatrix} R_1 = 0 \\ R_2 = -P \\ R_3 = 0 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 = 0 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{2L} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Esta matriz reduce a:



$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{2L} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

Podemos ahora acabar nuestro problema solucionando esta matriz para  $u_1$ ,  $u_2$ , y  $u_6$ :

$$u_1 = -PL/AE$$

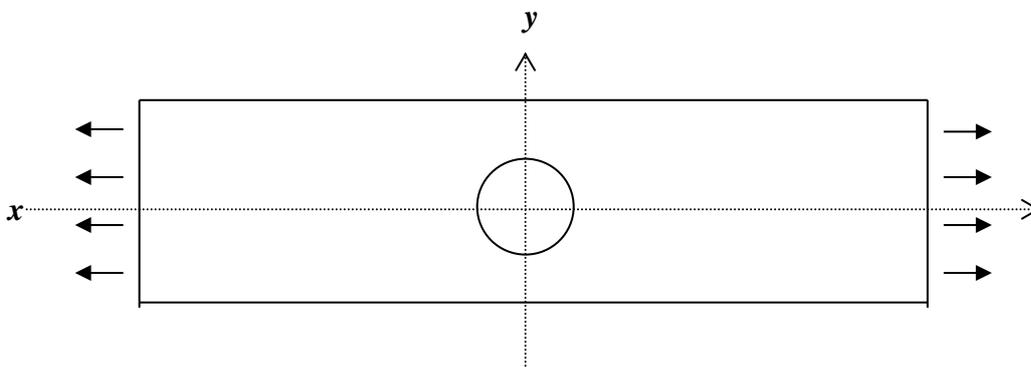
$$u_2 = -4PL/AE$$

$$u_6 = -PL/AE$$

Este uso de FEA a un braguero con tres miembros simple demuestra en general cómo el método trabaja. La mayoría de los usos a los problemas de la ingeniería, sin embargo, son mucho más complejos. Tales análisis requieren una gran cantidad de elementos y de nodos para representar exactamente el sistema físico que es estudiado. Estos análisis requieren inevitable el uso de una computadora.

### 1.5 Problema ilustrativo en 2-D

La figura 1. muestra una placa metálica de acero conteniendo un hoyo en el centro. La barra soportará una tensión de carga de 10,000 lb. aplicada en cada uno de los extremos, como se indican las flechas. Esta carga cambiará la forma de la barra ligeramente (deformación elástica) y producirá tensiones por toda la barra que variará de una posición a otra. Queremos conocer que tan grandes estas tensiones son, y en particular, si estas fuerzas serán tan grandes en cualquier punto, para causar una deformación permanente a la barra y quizá aún romperla. Para predecir la respuesta del sistema ( esfuerzos inducidos en la barra) a la influencia externa (tensión aplicada) encontraremos una solución numérica a las ecuaciones gobernantes y condiciones de carga, Representaremos el problema físico como un problema matemático



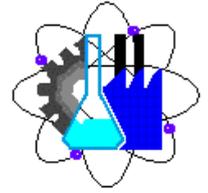


figura 1.

**Ecuaciones de equilibrio de tensión:**  $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= -f_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= -f_y\end{aligned}\tag{1.1}$$

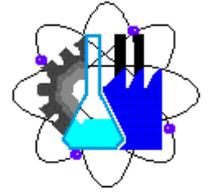
donde  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , y  $\tau_{xy}$  son componentes de tensión, y  $f_x$  y  $f_y$  son fuerzas (cargas) interiores que actúan en cada punto del material en el interior de la barra (tal como la gravedad); ellas son cero en este problema.

**Relaciones constitutivas (ecuaciones de tensión – deformación) que describen la respuesta elástica del acero.**

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_x + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \varepsilon_y \\ \sigma_y &= \frac{E\nu}{1-\nu^2} \varepsilon_x + \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ , y  $\gamma_{xy}$  son componentes de deformación, y  $E$  y  $\nu$  son propiedades físicas del acero medidas experimentalmente (módulo de Young o de elasticidad y relación de Poisson).

**Relación de desplazamiento – esfuerzo que describen aspectos de pureza geométrica de la deformación.**



$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\tag{1.3}$$

donde  $u$  y  $v$  son las componentes de desplazamiento (movimiento de un punto material en la barra) en las direcciones  $x$ ,  $y$ , respectivamente.

Estas ecuaciones pueden ser combinadas por sustituir (1.3) en (1.2) y después (1.2) en (1.1) nos lleva a dos ecuaciones gobernantes

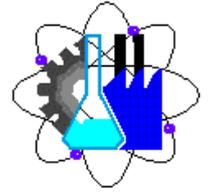
$$\begin{aligned}\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial xy} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -f_x \\ \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial xy} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -f_y\end{aligned}\tag{1.4}$$

las ecuaciones (1.4) son ecuaciones diferenciales parciales conteniendo dos funciones desconocidas,  $u(x,y)$  y  $v(x,y)$  estas son las componentes de desplazamiento.

El dominio de la región problema está en el plano  $x$ - $y$ , como se muestra en la figura 1. Las cargas tensionantes de 10,000 lb son aplicadas en los extremos de la barra, las cuales son parte de la frontera del dominio, de aquí que estas cargas sean representadas como condiciones frontera,

$$\sigma_x = \frac{10,000}{A}\tag{1.5}$$

aplicadas a ambos lados extremos donde  $A$  es el área de la superficie extremo de la barra.



Buscaremos la solución numérica de las funciones desconocidas  $u(x,y)$  y  $v(x,y)$  las cuales satisfagan las ecuaciones gobernantes y las condiciones frontera. Las soluciones de  $u(x,y)$  y  $v(x,y)$  pueden ser sustituidas en las ecuaciones (1.3) para determinar esfuerzos y los esfuerzos en las ecs. (1.2) para determinar tensiones que son las ecuaciones que buscamos.

### 1.6 Problema de valor frontera (equilibrio) 1-D

Se dice que una ecuación diferencial describe un *problema de valor frontera* si la variable dependiente y posiblemente sus derivadas son requeridas para tomar valores específicos en la frontera. La ecuación gobernante es la siguiente ecuación diferencial ordinaria

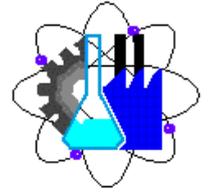
$$-\frac{d}{dx} \left[ \alpha(x) \frac{dU(x)}{dx} \right] + \beta(x) U(x) = f(x) \quad (1.6)$$

Donde  $x$  es la variable independiente,  $U(x)$  es la función desconocida (variable de estado) y  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  y  $f(x)$  son funciones conocidas. *El dominio* es un intervalo finito o infinito  $x_a < x < x_b$  a lo largo del eje  $x$ . Las funciones  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  usualmente representan propiedades físicas o materiales del sistema. Llamaremos a  $f(x)$  *carga interior* (algunas veces volumen de carga) desde que representa una carga aplicada al interior (dominio) del sistema. La frontera del dominio son los dos extremos  $x = x_a$  y  $x = x_b$ .

Las condiciones frontera podrían ser cualquiera de las dos condiciones siguientes:

$$\begin{array}{l} \text{En } x = x_a \\ U(x_a) = U_a \quad \text{o} \quad \left[ -\alpha(x) \frac{dU(x)}{dx} \right]_{x_a} = \tau_a \end{array} \quad (1.7)$$

$$\begin{array}{l} \text{En } x = x_b \\ U(x_b) = U_b \quad \text{o} \quad \left[ -\alpha(x) \frac{dU(x)}{dx} \right]_{x_b} = \tau_b \end{array}$$



Donde  $U_a, U_b, \tau_a$  y  $\tau_b$  son valores conocidos. Llamaremos a  $U_a, U_b, \tau_a$  y  $\tau_b$  cargas frontera, ya que ellas representan cargas en la frontera del sistema. La cantidad  $-\alpha \frac{dU}{dx}$  representada por el símbolo  $\tau$  tiene un definido significado físico en cada aplicación, careciendo de un nombre general apropiado para toda aplicación. Nosotros lo llamaremos flujo desde que ello frecuentemente representa un flujo de alguna cantidad, aunque en algunos problemas éste represente una fuerza.

## CAPÍTULO 3

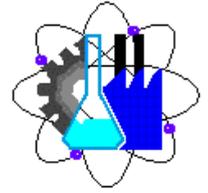
### MÉTODOS DE SOLUCION

#### **MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE PRUEBA**

En el capítulo anterior definimos términos y conceptos básicos como sistema, dominio, ecuación gobernante y condiciones de carga además, se presentaron varios tipos de problemas físicos y sus correspondientes formulaciones físicas en términos de ecuaciones diferenciales y condiciones frontera. Estas funciones contienen una función desconocida  $U(x)$  para problemas 1-D y  $U(x,y)$  para problemas 2-D. Para muchos problemas prácticos es imposible determinar la solución exacta de estas ecuaciones por ejemplo encontrar una expresión explícita para  $U$ , en términos de funciones conocidas, las cuales satisfagan la(s) ecuación(es) gobernante(s) y condiciones frontera. Como una alternativa FEM busca una solución aproximada: una expresión explícita para  $U$ , en términos de funciones conocidas, las cuales sólo satisfagan la(s) ecuación(es) gobernante(s) y condiciones frontera. Denotaremos  $\tilde{U}$  como una solución aproximada, mientras que  $U$  será la solución exacta.

El FEM obtiene una solución aproximada usando el clásico procedimiento de solución de prueba. El procedimiento de la solución de prueba está caracterizado por tres operaciones principales, ellas son:

- • Construcción de una solución de prueba
- • Aplicación de un criterio de optimización a  $\tilde{U}$
- • Estimación de exactitud de  $\tilde{U}$



## 2.1 Descripción de un problema ilustrativo

Consideraremos un problema de valor frontera en 1-D. La ecuación gobernante es una ecuación diferencial ordinaria, es de segundo orden y es lineal:

$$\frac{d}{dx} \left[ x \frac{dU(x)}{dx} \right] = \frac{2}{x^2} \quad (2.1)$$

El dominio de nuestro problema ilustrativo será el intervalo  $1 < x < 2$ , como se muestra en la figura. 2.1. La frontera del dominio está en los puntos extremos  $x = 1$  y  $x = 2$ . Las condiciones frontera en cada punto son

$$U(1) = 2 \quad \text{y} \quad \left[ -x \frac{dU}{dx} \right]_{x=2} = \frac{1}{2} \quad (2.2)$$

podríamos estar tentados a sustituir el valor de  $x = 2$  en la ecuación (2.2) y obtener

$\left[ \frac{dU}{dx} \right]_{x=2} = -\frac{1}{4}$ . Sin embargo se observó en la sección 1.5, ecn. (1.6) que la ecn. (2.2) tiene una interpretación física y nosotros le llamaremos flujo y la designaremos con la letra  $\tau$ . Así nosotros describiremos la ecn. (2.2) como

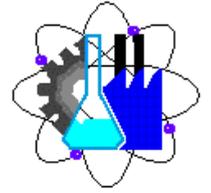
$$\begin{aligned} U(1) &= 2 \\ \tau(2) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

---

## 2.2 Construcción de una solución de prueba para el problema ilustrativo

La selección de expresiones para la función de prueba  $\phi_i(x)$  una importante consideración práctica es usar funciones que sean fáciles de trabajar (como lo veremos brevemente)..

$$\tilde{U}(x; a) = \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \dots + a_N \phi_N(x) \quad (2.4)$$



aquí  $x$  representa todas las variables independientes en el problema las funciones  $\phi_i(x)$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  son funciones conocidas llamadas funciones de prueba. Los coeficientes  $a_i$  son parámetros indeterminados frecuentemente llamados *grados de libertad* o algunas veces *coordenadas generalizadas*.  $\tilde{U}$  es una función de  $x$  también como de  $a_i$ .

Para plantear una solución de prueba las potencias de  $x$  son ciertamente más fáciles para realizar operaciones, así que una lógica elección serían los primeros términos de una serie de potencias por ejemplo un polinomio

$$\tilde{U}(x; a) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_Nx^{N-1}$$

$$\tilde{U}(x; a) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (2.5)$$

Consideremos la ecuación (2.2) o (2.3) y las aplicamos a las ecuaciones (2.5)

$$\tilde{U}(1; a) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2$$

(2.6)

$$\left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right]_{x=2} = -2a_2 - 8a_3 - 24a_4 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2$$

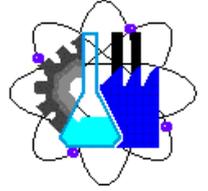
(2.7)

$$a_2 + 4a_3 + 12a_4 = -\frac{1}{4}$$

Las ecuaciones (2.7) son llamadas *ecuaciones de restricción*.

Debemos eliminar dos de cualquiera de las  $a_i$ , la más fácil elección eliminar cualquier parámetro que aparezca en sólo una de las ecuaciones de restricción. Así que resolviendo la primera de las dos ecns. (2.7) para  $a_1$ , y sustituyéndola en la ecn. (2.5) tenemos

$$\tilde{U}(x; a) = 2 + a_2(x-1) + a_3(x^2-1) + a_4(x^3-1)$$



(2.8)

Ahora podemos resolver para cualquiera de las  $a_i$ , escogemos a  $a_2$ , y la sustituimos en (2.8) y obtenemos.

$$\tilde{U}(x; a) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + a_3(x-1)(x-3) + a_4(x-1)(x^2 + x - 11) \quad (2.9)$$

Identificamos términos de la ecn (2.9) con los de la ecn. (2.4)

$$\tilde{U}(x; a) = \phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) \quad (2.10)$$

donde

$$\phi_0(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1)$$

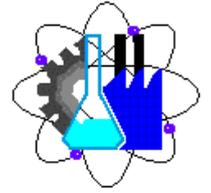
$$\phi_1(x) = (x-1)(x-3)$$

$$\phi_2(x) = (x-1)(x^2 + x - 11)$$

La notación  $a_3$ , y  $a_4$  han cambiado a  $a_1$  y  $a_2$  respectivamente, debido a que hay dos parámetros libres, así que es más conveniente llamarlos 1 y 2.

La expresión para la solución de prueba para los flujos es aplicando la ecn. (2.2) a la ecn. (2.10)

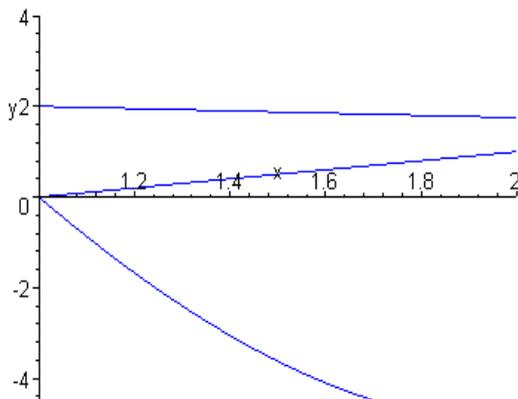
$$\tilde{\tau}(x; a) = \left[ -x \frac{d\phi_0(x)}{dx} \right] + a_1 \left[ -x \frac{d\phi_1(x)}{dx} \right] + a_2 \left[ -x \frac{d\phi_2(x)}{dx} \right] \quad (2.11)$$



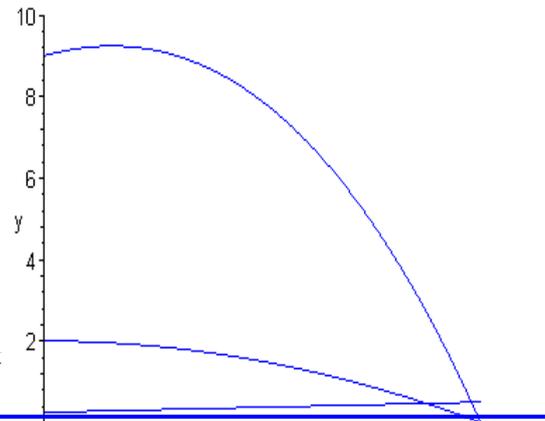
$$-x \frac{d\phi_0(x)}{dx} = \frac{1}{4}x$$

$$-x \frac{d\phi_1(x)}{dx} = -2x(x-2)$$

$$-x \frac{d\phi_2(x)}{dx} = -3x(x-2)(x+2)$$



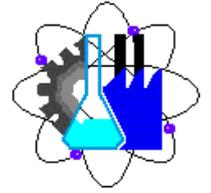
a y (b) flujos  $u$



## 2.3 Cuatro soluciones aproximadas usando métodos de residuos ponderados

### 2.3.1 Aplicación de un criterio de optimización

El propósito del criterio de optimización es determinar valores numéricos específicos para cada uno de los parámetros  $a_1, a_2, \dots, a_N$ . Observe que para un conjunto particular de valores para todas las  $a_i$  únicamente define una solución particular. Es el trabajo del criterio de optimización seleccionar de todas las posibilidades una mejor u óptima solución, un mejor conjunto de valores



para todas las  $a_i$ . Por mejor se entiende que la solución es tan cercana como sea posible, entendiéndose, a la solución exacta.

Hay dos tipos de criterios de optimización que han jugado un rol dominante históricamente en FEM.

- • **Métodos de Residuos Ponderados** (MRP), los cuales son aplicables cuando las ecuaciones gobernantes son ecuaciones diferenciales.
- • **Método Variacional de Ritz** (MVR), el cual es aplicable cuando las ecuaciones gobernantes son ecuaciones variacionales (integrales).

El criterio de MRP busca minimizar una expresión de error en la ecuación diferencial. Hay muchos diferentes criterios MRP, cuatro de los más populares criterios son:

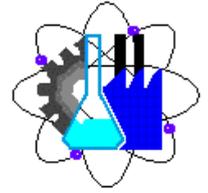
- • **Método de colocación**
- • **Método de subdominio**
- • **Método de los mínimos cuadrados**
- • **Método de Galerkin**

El principio Variacional, algunas veces referido como principio de extremos o mínimos, busca minimizar, o encontrar un extremo en alguna cantidad física.

Ahora aplicaremos cinco de los más populares criterios de optimización, usando cada vez la misma solución de prueba. Esto nos llevará a cinco diferentes soluciones aproximadas tan cercanas como la solución exacta

Primero definiremos una cantidad llamada *el residual*. Transferiremos todos los términos al lado izquierdo de la ecuación (2.1) de tal manera que el cero está en el lado derecho

$$\frac{d}{dx} \left[ x \frac{dU(x)}{dx} \right] - \frac{2}{x^2} = 0 \quad (2.12)$$



La ecuación (2.12) nos dice que si sustituimos la solución exacta  $U(x)$  en el lado izquierdo de ella, entonces el lado derecho sería cero sobre el dominio completo.

Si cualquiera otra función tal como la solución aproximada  $\tilde{U}$  fuera sustituida por  $U(x)$ , el resultado sería una función diferente de cero, llamada el residuo denotada por  $R(x; a)$

$$R(x; a) = \frac{d}{dx} \left[ x \frac{d\tilde{U}(x; a)}{dx} \right] - \frac{2}{x^2} \neq 0 \quad (2.12)$$

Así sustituyendo la ecuación (2.10) dentro de (2.12) tendremos

$$R(x; a) = -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2 - 4)a_2 - \frac{2}{x^2} \quad (2.13)$$

la intención es encontrar valores para  $a_1$  y  $a_2$  los cuales hagan  $R(x; a)$  tan cercano a cero como sea posible para todo valor de  $x$  en el dominio.

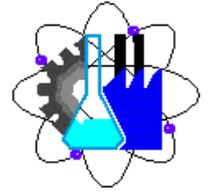
Por definición la solución exacta es la función que satisface la ecuación diferencial ordinaria sobre el dominio completo y las condiciones frontera.

La aplicación de MRP produce un conjunto de ecuaciones algebraicas tal que su solución es el mejor conjunto de valores numéricos para  $a_i$ .

Ahora aplicaremos uno de los cinco criterios de MRP para nuestro problema ilustrativo usando el residual en la ecuación (2.13)

### **2.3.1 MÉTODO DE COLOCACIÓN**

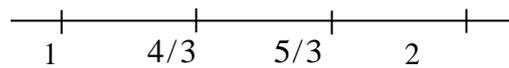
Para cada parámetro indeterminado  $a_i$ , escogemos un punto  $x_i$  en el dominio. Para cada  $x_i$  forzamos el residual exactamente a cero.



$$\begin{aligned}R(x_1; a) &= 0 \\R(x_2; a) &= 0 \\&\vdots \\R(x_n; a) &= 0\end{aligned}\tag{2.14}$$

Para una solución con  $N$  parámetros, produciremos un sistema de  $N$  ecuaciones residuales. Los puntos  $x_i$  son llamados puntos de colocación; ellos podrían ser colocados donde sea, en el dominio y en la frontera no necesariamente en un patrón particular.

El presente problema tiene sólo dos parámetros  $a_1, a_2$  podría ser razonable distribuirlo uniformemente por ejemplo  $x_1 = 4/3$  y  $x_2 = 5/3$



Sustituyendo estos puntos en la ecuación (2.13) obtendremos un sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}a_1 + 4a_2 &= \frac{11}{8} \\ \frac{8}{3}a_1 + 13a_2 &= \frac{97}{100}\end{aligned}\tag{2.15}$$

Cuya solución es

$$\begin{aligned}a_1 &= 2.0993 \\ a_2 &= -0.3560\end{aligned}\tag{2.16}$$

la solución aproximada para nuestro problema se obtiene sustituyendo la ecuación (2.16) en (2.10) y (2.11)

$$\tilde{U}_C(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + 2.0993(x-1)(x-3) - 0.356(x-1)(x^2 + x - 11)$$

$$\tilde{\tau}_C(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-2) - 4.1986x(x-2) + 1.068x(x-2)(x+2)\tag{2.17}$$

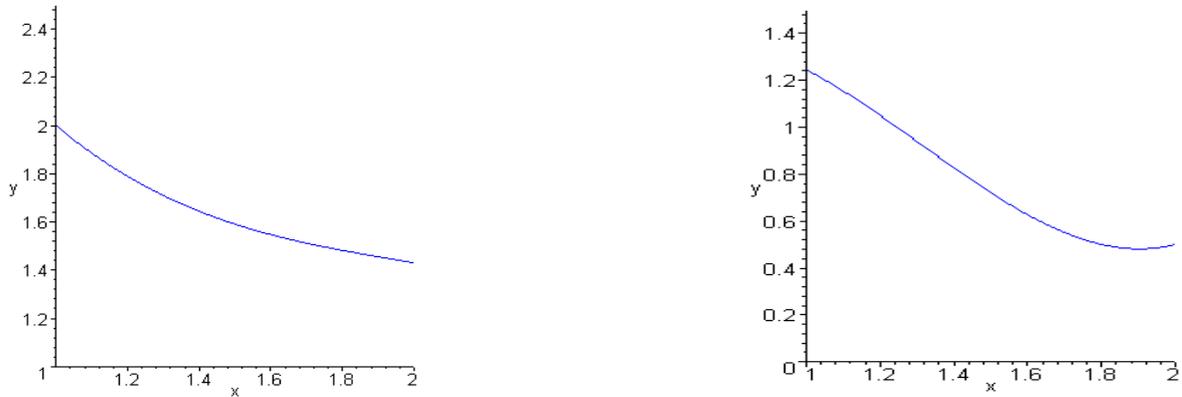
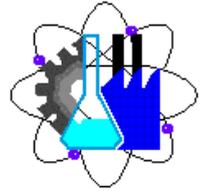


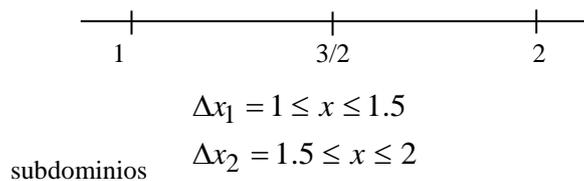
Figura 2. Solución Métodos de Colocación (a)  $\tilde{U}(x)$ , (b)  $\tilde{\tau}_C(x)$

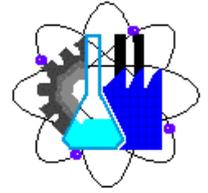
### 2.3.2 MÉTODO DE SUBDOMINIOS

En cada parámetro indeterminado  $a_i$  escoger un intervalo  $\Delta x_i$  en el dominio y forzar el promedio del residuo en cada intervalo a ser cero

$$\frac{1}{\Delta x_i} \int_{\Delta x_i} R(x; a) dx = 0 \quad i=1,2,\dots,N \quad (2.18)$$

De nuevo para una solución de prueba con  $N$  ecuaciones residuales. Los intervalos  $\Delta x_i$ , son llamados subdominios. Estos se escogen de forma que se traslapen o con separación entre ellos. Para nuestro problema escogeremos dos subdominios, una elección simple es dividir el dominio en dos partes iguales.





Sustituyendo el residuo ecn. (2.13) dentro de la ecn. (2.18) y usando tales subdominios

$$\int_1^{1.5} \left[ -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right] dx = 0$$
$$\int_{1.5}^2 \left[ -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right] dx = 0 \quad (2.19)$$

**Realización la integración obtenemos dos ecuaciones algebraicas**

$$\frac{1}{2}a_1 + \frac{9}{8}a_2 = \frac{19}{24}$$

$$\frac{3}{2}a_1 + \frac{63}{8}a_2 = \frac{11}{24}$$

cuya solución es

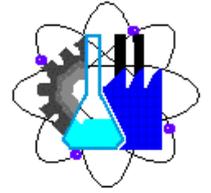
$$a_1 = 2.5417$$

$$a_2 = -0.4259 \quad (2.20)$$

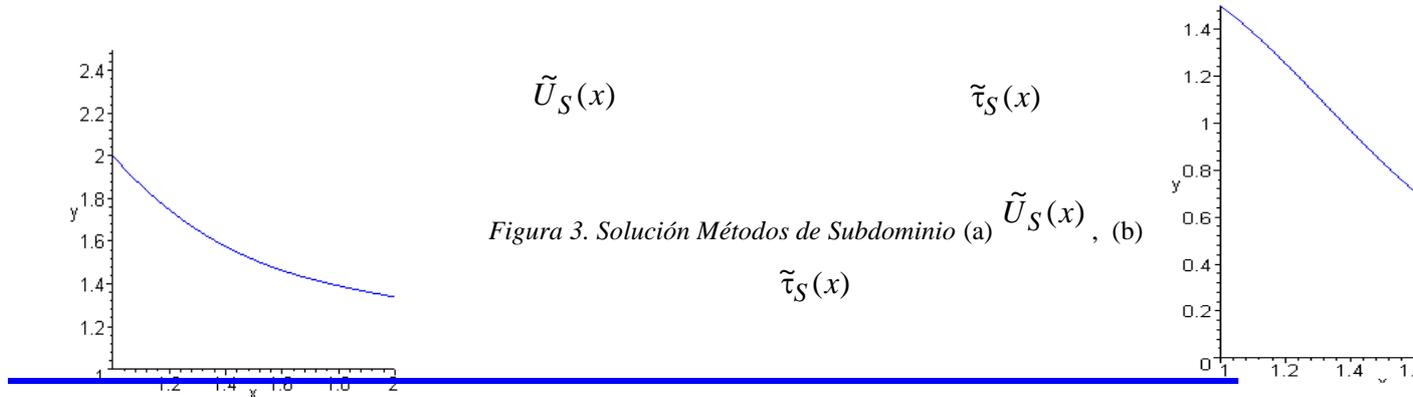
Sustituyendo (2.20) dentro de las ecns. (2.10) y (2.11) obtenemos la solución aproximada del subdominio

$$\tilde{U}_s(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + 2.5417(x-1)(x-3) - 0.4259(x-1)(x^2+x-11)$$

$$\tilde{\tau}_s(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-2) - 5.0834x(x-2) + 1.2777x(x-2)(x+2) \quad (2.21)$$



falta \*



### 2.3.3 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Con este criterio minimizamos con respecto a cada  $a_i$  la integral sobre el dominio completo de los cuadrados del residuo.

La integral del cuadrado del residuo es una función de los  $a_i$  así que la minimización requiere hacer las derivadas parciales con respecto a cada  $a_i$  iguales a cero

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \int_1^2 R^2(x; a) dx = 0$$

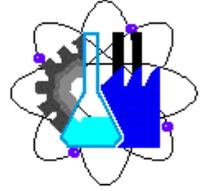
$$\frac{\partial}{\partial a_2} \int_1^2 R^2(x; a) dx = 0$$

⋮

$$\frac{\partial}{\partial a_N} \int_1^2 R^2(x; a) dx = 0$$

(2.22)

Llevando la diferenciación parcial dentro del integrando tenemos



$$\begin{aligned} \int_1^2 R(x;a) \frac{\partial R(x;a)}{\partial a_1} dx &= 0 \\ \int_1^2 R(x;a) \frac{\partial R(x;a)}{\partial a_2} dx &= 0 \\ \vdots \\ \int_1^2 R(x;a) \frac{\partial R(x;a)}{\partial a_N} dx &= 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde la constante 2 obtenida en la derivación parcial se cancela. Una vez más, una solución de prueba con N parámetros nos conduce a N ecuaciones residuales.

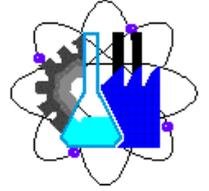
De la ecuación (2.23)

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(x;a)}{\partial a_1} &= 4(x-1) \\ \frac{\partial R(x;a)}{\partial a_2} &= 3(3x^2 - 4) \end{aligned} \tag{2.24}$$

así que nuestras dos ecuaciones residuales serán

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left[ -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2 - 4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right] 4(x-1) dx &= 0 \\ \int_1^2 \left[ -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2 - 4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right] 3(3x^2 - 4) dx &= 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

ejecutando la integración nos lleva a obtener dos ecuaciones algebraicas:



$$\frac{16}{3}a_1 + 27a_2 = 8\ln 2 - \frac{7}{2}$$

$$27a_1 + \frac{711}{5}a_2 = \frac{33}{4}$$

(2.26)

cuya solución

$$a_1 = 2.3155$$

$$a_2 = -0.3816$$

(2.27)

Sustituyendo la ecn. (2.27) en la ecn. (2.10) y (2.11) obtenemos la solución aproximada por mínimos cuadrados:

$$\tilde{U}_L(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + 2.3155(x-1)(x-3) - 0.3816(x-1)(x^2 + x - 11)$$

$$\tilde{\tau}_L(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-2) - 4.631x(x-2) + 1.1448x(x-2)(x+2)$$

(2.28)

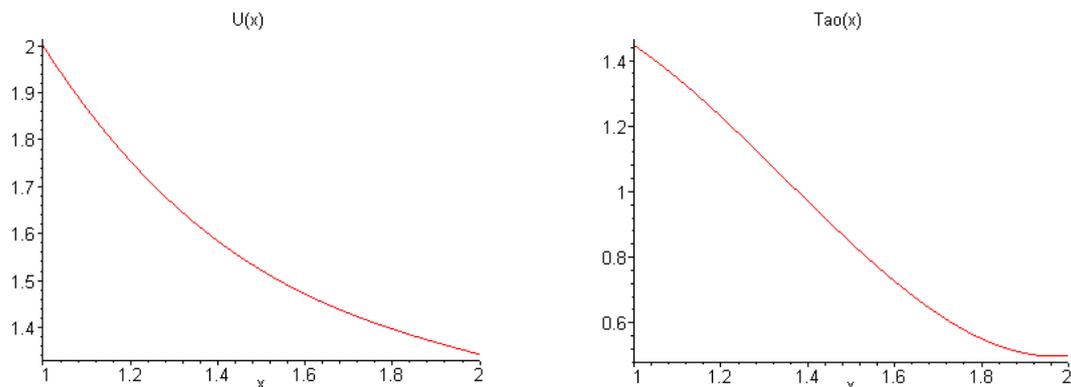
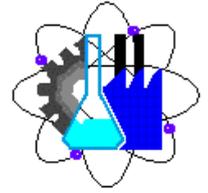


Figura 4. Solución Métodos de Mínimos cuadrados (a)  $\tilde{U}_L(x)$ , (b)  $\tilde{\tau}_L(x)$

### 2.3.4 MÉTODO DE GALERKIN



Para cada parámetro  $a_i$  requerimos que un promedio ponderado de  $R(x, a)$  sobre el dominio completo sea cero. Las funciones ponderadas son las funciones de prueba  $\phi_i(x)$  asociadas con cada  $a_i$ .

$$\int_1^2 R(x, a) \phi_1(x) dx = 0$$

$$\int_1^2 R(x, a) \phi_2(x) dx = 0$$

$\vdots$

$$\int_1^2 R(x, a) \phi_N(x) dx = 0$$

(2.29)

de nuevo una solución de prueba con N parámetro lleva a un sistema de N ecuaciones residuales, usando las ecuaciones (2.10) y (2.13) en las únicas dos ecuaciones residuales que se tienen en nuestro ejemplo

$$\int_1^2 \left[ -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2 - 4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right] (x-1)(x-3) dx = 0$$

$$\int_1^2 \left[ -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2 - 4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right] (x-1)(x^2 + x - 11) dx = 0$$

(2.30)

realizando la integración nos lleva a las dos ecuaciones algebraicas

$$-\frac{5}{3}a_1 - \frac{41}{5}a_2 = \frac{29}{6} - 8\ln 2$$

$$-\frac{41}{5}a_1 - \frac{81}{2}a_2 = \frac{211}{16} - 24\ln 2$$

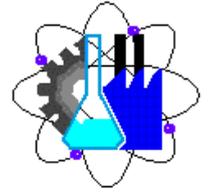
(2.31)

$$a_1 = 2.1378$$

$$a_2 = -0.3477$$

(2.32)

sustituyendo las ecuaciones (2.32) en las ecuaciones (2.10) y (2.11)



$$\tilde{U}_G(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + 2.1378(x-1)(x-3) - 0.3477(x-1)(x^2 + x - 11)$$

$$\tilde{\tau}_G(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-2) - 4.2756x(x-2) + 1.0431x(x-2)(x+2)$$

(2.33)

### 2.3.5 METODO DE RITZ - (RAYLEIGH)

Este Método desarrollado por W. Ritz en 1909 para la solución de problemas de equilibrio y por Lord Rayleigh en 1870 para la solución de problemas de vibración. De aquí que el método es algunas veces llamado Rayleigh - Ritz.

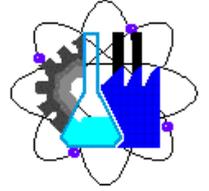
Para usar el método variacional de Ritz en FEM se necesita sólo comprender unos pocos conceptos elementales del cálculo variacional antes de proceder directamente con la técnica de Ritz. Observemos que la ecuación diferencial y condiciones frontera en las ecuaciones (2.1) y (2.2), respectivamente, son completamente equivalentes a la siguiente formulación variacional

$$\delta I(U) = 0 \tag{2.34}$$

donde

$$I(U) = \int_1^2 \left[ \frac{1}{2} x \left( \frac{dU}{dx} \right)^2 + \frac{2}{x^2} U \right] dx + \left[ -x \frac{dU}{dx} U \right]_1^2$$

Por equivalente se entiende que la solución exacta de (2.1) y (2.2) es idéntica a la solución exacta de la ecuación (2.34). La integral  $I(U)$  es un funcional - escalar de la función  $U(x)$ . Podemos pensar que  $U(x)$  es una variable independiente y que  $I$  es una función (llamada funcional) de la "variable"  $U(x)$ . El operador  $\delta$  que actúa sobre  $I(U)$  involucra un proceso de variar la función  $U(x)$  dentro de una pequeña vecindad cercana a la solución exacta (algo análogo a la forma que el operador diferencial  $d/dx$  significa una pequeña variación en la variable independiente  $x$ ). Si esta operación variacional fuera ejecutada teóricamente (no numéricamente), en el contexto del cálculo de variaciones, la solución sería la ecuación diferencial (2.1). Desafortunadamente



esto no, nos acerca alguna solución numérica. Para resolver este dilema. Retornaremos al método de Ritz.

El método de Ritz es una técnica práctica para obtener una solución numérica aproximada directamente de la formulación variacional. Sustituimos para  $U$  en la ecuación (2.34) una solución de prueba, tal como la ecuación (2.10). Si las  $\phi_i(x)$  todas tienen expresiones específicas, la integral con respecto a la variable  $x$  puede ser evaluada, y por lo tanto  $I$  será una función ordinaria (no funcional) de parámetros,

$$I[\tilde{U}(x; a)] = I(a) \quad (2.35)$$

Podremos hacer a  $I(a)$  estacionaria aplicando la usual condición del cálculo diferencial  $dI = 0$ . así

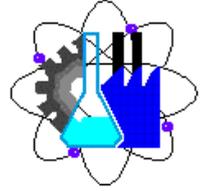
$$dI = \frac{\partial I}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial I}{\partial a_2} da_2 + \dots + \frac{\partial I}{\partial a_N} da_N = 0 \quad (2.36)$$

debido a que  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$ , puede ser cada uno variados independientemente, entonces los coeficientes de cada  $da_i$  en la ecuación (2.36) pueden desaparecer separadamente

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0 \quad \frac{\partial I}{\partial a_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial I}{\partial a_N} = 0 \quad (2.37)$$

ahora apliquemos el método de Ritz a nuestro problema ilustrativo. Usaremos la misma solución de prueba que fue usada en los métodos anteriores de residuos ponderados. Sustituyendo la ecuación (2.10) en la ecuación (2.34) tenemos

$$I(\tilde{U}) = \int_1^2 \left[ \frac{1}{2} x \left[ \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right]^2 + \frac{2}{x^2} (\phi_0 + a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2) \right] dx + \left[ \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right] (\phi_0 + a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2) \right]_1^2 \quad (2.38)$$

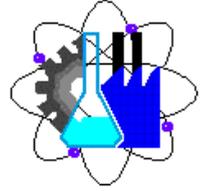


ahora aplicaremos las condiciones de estacionariedad dadas en la ecuación (2.37) a la ecuación (2.38), la cual no lleva después de recomodar términos

$$\begin{aligned}
 & \left[ \int_1^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} x \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dx \right] a_1 + \left[ \int_1^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} x \frac{\partial \phi_2}{\partial x} dx \right] a_2 \\
 & = - \int_1^2 \frac{2}{x^2} \phi_1 dx - \int_1^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} x \frac{\partial \phi_0}{\partial x} dx - \left[ \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right] \phi_1 \right]_1^2 \\
 & \left[ \int_1^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} x \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dx \right] a_1 + \left[ \int_1^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} x \frac{\partial \phi_2}{\partial x} dx \right] a_2 \\
 & = - \int_1^2 \frac{2}{x^2} \phi_2 dx - \int_1^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} x \frac{\partial \phi_0}{\partial x} dx - \left[ \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right] \phi_2 \right]_1^2 \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

sustituyendo en la expresión anterior las  $\phi_i(x)$  obtenidas en la ecuación (2.10) tenemos

$$\begin{aligned}
 & \left[ \int_1^2 4x(x-2)^2 dx \right] a_1 + \left[ \int_1^2 6x(x-2)^2(x+2) dx \right] a_2 \\
 & = - \int_1^2 \frac{2}{x^2} (x-1)(x-3) dx + \int_1^2 \frac{x}{2} (x-2) dx + \frac{1}{2} \\
 & \quad (2.40)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \left[ \int_1^2 6x(x-2)^2(x+2) dx \right] a_1 + \left[ \int_1^2 9x(x-2)^2(x+2)^2 dx \right] a_2 \\
 & = - \int_1^2 \frac{2}{x^2} (x-1)(x^2+x-1) dx + \int_1^2 \frac{3x}{4} (x-2)(x+2) dx + \frac{5}{2}
 \end{aligned}
 \tag{2.40}$$

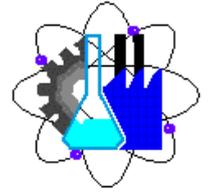
donde los términos frontera de la ecuación (2.39) fueron evaluados usando las ecns. (2.2) y (2.10) esto es

$$\begin{aligned}
 \left[ \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \phi_1 \right]_1^2 &= \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x=2} \phi_1(2) - \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x=1} \phi_1(1) = \frac{1}{2}(-1) \\
 \left[ \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \phi_2 \right]_1^2 &= \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x=2} \phi_2(2) - \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right)_{x=1} \phi_2(1) = \frac{1}{2}(-5)
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$

llevando a cabo la integración en las ecns. (2.40) obtenemos las siguientes dos ecns. Algebraicas

$$\begin{aligned}
 \frac{5}{3}a_1 + \frac{41}{5}a_2 &= 8\ln 2 - \frac{29}{6} \\
 \frac{41}{5}a_1 + \frac{81}{2}a_2 &= 24\ln 2 - \frac{211}{16}
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones (2.31) del método residual de Galerkin, de seguro que las soluciones aproximadas  $\tilde{U}_R(x)$  y  $\tilde{\tau}_R(x)$  resultarán también idénticas. Esto no es una coincidencia para este problema en particular. Una manifestación de un principio general es que el método variacional de Ritz y el método residual de Galerkin siempre producirán idénticas soluciones cuando se use la misma solución de prueba. (algunos autores enfatizan esta identidad combinando los dos nombres como Ritz - Galerkin o Galerkin - Ritz.)



## UN PROCEDIMIENTO GENERAL DE 12 PASOS DE LA SOLUCIÓN DE PRUEBA

El siguiente procedimiento de doce pasos será usado para resolver la mayoría de problemas propuestos en este curso. El procedimiento va desde el análisis de las ecuaciones gobernantes a la solución numérica final. Esto será usado con o sin el concepto de elemento. Esta sección explicará como será usado sin el concepto elemento (o lo que es lo mismo, será usado con sólo un elemento).

Los primeros seis pasos involucran manipulación teórica a lápiz y papel para el ingeniero analista; los segundos seis pasos involucran cómputo numérico usualmente ejecutado en computadora (o calculadora para problemas con pocos grados de libertad como el presente).

Los pasos de computación numérica del 7 al 12 serán suficientemente simples, en este y el próximo capítulo serán desarrollados a mano. En el capítulo 7, sin embargo serán codificados dentro de un paquete computacional. De hecho, los pasos 7 al 12 describen la estructura básica de un programa típico de elemento finito.

### Desarrollo teórico

**PASO 1:** Escribir las ecuaciones residuales de Galerkin.

**2:** Integrar por partes

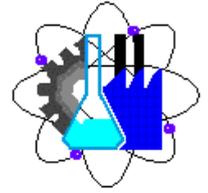
**3:** Sustituir la forma general de la solución de prueba en el interior de las integrales en las ecuaciones residuales

La expresión formal resultante es el sistema de ecuaciones

**4:** Desarrollo de expresiones específicas para la función de prueba

**5:** Sustituir las funciones de prueba en el sistema de ecuaciones, y transformar las integrales en una forma apropiada para evaluación numérica

**6:** Preparar expresiones para el flujo



### Computación numérica

- PASO 7:** Especificar datos numéricos para problema en particular
- 8:** Evaluar los términos interiores en el sistema de ecuaciones
  - 9:** Aplicar las condiciones frontera (BC) al sistema de ecuaciones
  - 10:** Resolver el sistema de ecuaciones
  - 11:** Evaluar el flujo
  - 12:** Mostrar la solución y estimar su exactitud

**FIGURA 4.1** Procedimiento de doce pasos, no usando el concepto de elemento

## Un problema ilustrativo

Por continuidad analizaremos el mismo problema ilustrativo descrito en la sección anterior, repetido aquí por conveniencia.

$$\frac{d}{dx} \left[ x \frac{dU(x)}{dx} \right] = \frac{2}{x^2} \quad (4.1)$$

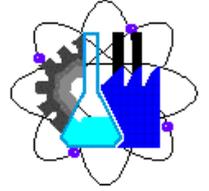
El dominio de nuestro problema ilustrativo será el intervalo  $1 < x < 2$ , como se muestra en la figura. 2.1. La frontera del dominio está en los puntos extremos  $x = 1$  y  $x = 2$ . Las condiciones frontera en cada punto son

$$U(1) = 2 \quad \text{y} \quad \left[ -x \frac{dU}{dx} \right]_{x=2} = \frac{1}{2} \quad (4.2)$$

## DESARROLLO TEÓRICO

**Paso 1:** Escribir la ecuación residual de Galerkin, para cada una de los parámetros desconocidos. En principio, podríamos usar cualquiera de los criterios de optimización discutidos en el capítulo 3; sin embargo utilizaremos el criterio de Galerkin.

El residual para la ecuación gobernante [ecn. (4.1)] es



$$R(x; a) = \frac{d}{dx} \left[ x \frac{d\tilde{U}(x; a)}{dx} \right] - \frac{2}{x^2} \quad (4.3)$$

retomando las ecns. (2.29), las N ecuaciones residuales de Galerkin son

$$\int_{x_a}^{x_b} R(x, a) \phi_i(x) dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.4)$$

sustituyendo (4.3) en (4.4) tenemos

$$\int_1^2 \left[ \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) - \frac{2}{x^2} \right] \phi_1(x) dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.5)$$

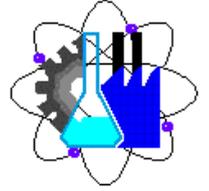
**Paso 2:** Integrar por partes el término de la más alta derivada en la ecuación residual, las razones para hacer esto se dan en el paso 3. De la regla de la cadena, para diferenciar el producto de dos funciones, decimos  $f(x)$  y  $g(x)$

$$\frac{d}{dx}(f g) = \frac{df}{dx} g + f \frac{dg}{dx} \quad (4.6)$$

integrando ambos lados sobre el mismo intervalo  $x_a$  a  $x_b$

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{d}{dx}(f g) dx = \int_{x_a}^{x_b} \frac{df}{dx} g dx + \int_{x_a}^{x_b} f \frac{dg}{dx} dx \quad (4.7)$$

el término de la izquierda de la igualdad es una diferencial perfecta



$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{d}{dx}(f g) dx$$

$$\int_{x_a}^{x_b} d(fg)$$

$$[fg]_{x_a}^{x_b}$$

(4.8)

Reordenando términos en (4.8)

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{df}{dx} g dx = [fg]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} f \frac{dg}{dx} dx \quad (4.9)$$

la cual es la fórmula deseada para integración por partes.

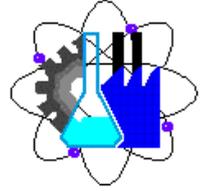
Ahora aplicando la ecuación anterior a los términos de la ecuación (4.5)

$$\int_{x_a}^{x_b} \left[ \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) - \frac{2}{x^2} \right] \phi_i dx = - \left[ \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \phi_i \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} x \frac{d\tilde{U}}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx \quad (4.10)$$

donde

$$f = \left[ x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right] \quad \text{y} \quad g = \phi_i$$

el signo menos ha sido agregado directamente frente del término frontera  $\left[ x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right]$  así que podemos identificarlo como el flujo. Sustituyendo la ecn. (4.10) en (4.5) tenemos



$$\int_{x_a}^{x_b} x \frac{d\tilde{U}}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx = - \int \frac{2}{x^2} \phi_i dx - \left[ - \left( x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \phi_i \right]_{x_a}^{x_b} \quad i=1,2,\dots,N \quad (4.11)$$

observe que los términos de carga en el interior y en la frontera están contenidos en el lado derecho de la igualdad en la anterior ecuación.

**Paso 3:** Sustituya la forma general de la solución de prueba  $\tilde{U} = \phi_0 + a_1\phi_2 + a_2\phi_3 + \dots + a_N\phi_N$  en el lado izquierdo de la igualdad de la ecn. (4.11)

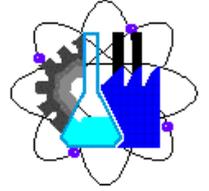
$$\frac{d\tilde{U}}{dx} = \frac{d\phi_0}{dx} + \sum_{j=1}^N a_j \frac{d\phi_j}{dx} \quad (4.12)$$

lado izquierdo de (4.11)

$$\begin{aligned} & \int_{x_a}^{x_b} x \frac{d\tilde{U}}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx \\ &= \int_{x_a}^{x_b} x \left[ \frac{d\phi_0}{dx} + \sum_{j=1}^N a_j \frac{d\phi_j}{dx} \right] \frac{d\phi_i}{dx} dx \\ &= \sum_{j=1}^N \left[ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_j}{dx} dx \right] a_j + \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx} dx \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sustituyendo la ecn (4.13) en (4.11) la ecuación residual llega a ser

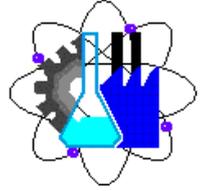
$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^N \left[ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_j}{dx} dx \right] a_j = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_i dx - \left[ - \left[ x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right] \phi_i \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx} dx \\ & \quad i=1,2,\dots,N \quad (4.14) \end{aligned}$$



Esto completa el tercer paso, Si examinamos este punto, las ecuaciones (4.14) podrían ser expresadas más ampliamente como

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} i=1 \\ j=1\dots N \end{matrix} \left[ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_1}{dx} x \frac{d\phi_1}{dx} dx \right] a_1 + \left[ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_1}{dx} x \frac{d\phi_2}{dx} dx \right] a_2 + \dots + \left[ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_1}{dx} x \frac{d\phi_N}{dx} dx \right] a_N \\
 & = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_1 dx - \left[ - \left[ x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right] \phi_1 \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_1}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx} dx \\
 & \begin{matrix} i=2 \\ j=1\dots N \end{matrix} \left[ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_2}{dx} x \frac{d\phi_1}{dx} dx \right] a_1 + \left[ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_2}{dx} x \frac{d\phi_2}{dx} dx \right] a_2 + \dots + \left[ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_2}{dx} x \frac{d\phi_N}{dx} dx \right] a_N \\
 & = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_2 dx - \left[ - \left[ x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right] \phi_2 \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_2}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx} dx \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \begin{matrix} i=N \\ j=1\dots N \end{matrix} \left[ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_N}{dx} x \frac{d\phi_1}{dx} dx \right] a_1 + \left[ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_N}{dx} x \frac{d\phi_2}{dx} dx \right] a_2 + \dots + \left[ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_N}{dx} x \frac{d\phi_N}{dx} dx \right] a_N \\
 & = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_N dx - \left[ - \left[ x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right] \phi_N \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_N}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx} dx
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

o, equivalentemente en forma matricial

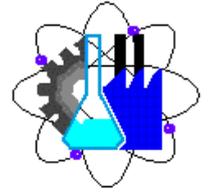


$$= \begin{bmatrix} \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_1}{dx} x \frac{d\phi_1}{dx} dx & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_1}{dx} x \frac{d\phi_2}{dx} dx & \dots & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_1}{dx} x \frac{d\phi_N}{dx} dx \\ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_2}{dx} x \frac{d\phi_1}{dx} dx & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_2}{dx} x \frac{d\phi_2}{dx} dx & \dots & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_2}{dx} x \frac{d\phi_N}{dx} dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_N}{dx} x \frac{d\phi_1}{dx} dx & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_N}{dx} x \frac{d\phi_2}{dx} dx & \dots & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_N}{dx} x \frac{d\phi_N}{dx} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_1 dx - \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \phi_1 \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_1}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx} dx \\ - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_2 dx - \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \phi_2 \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_2}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx} dx \\ \vdots \\ - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_N dx - \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \phi_N \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_N}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx} dx \end{bmatrix}$$

(4.16)

definimos



$$K_{ij} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_j}{dx} dx$$

$$F_i = \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_i dx - \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right]_{x_a}^{x_b} \phi_i - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx} dx$$

(4.17)

la ecuación (4.16) puede ser escrita de forma compactada como

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N1} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix}$$

(4.18)

o en forma abreviada

$$[K]\{a\} = \{F\}$$

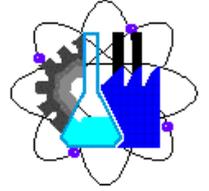
(4.19)

las ecns (4.14), (4.15), (4.16), (4.17), (4.18) son sólo 5 diferentes formas de representar el mismo conjunto de N ecuaciones.

la matriz  $K$  es conocida en elemento finito como la matriz de rigidez, el vector  $F$  es casualmente referido como vector carga (vector fuerza)

Podemos identificar tres beneficios que fueron logrados como resultado de integrar por partes

1. El más alto grado de las derivadas de la solución de prueba o funciones de prueba que aparece en el sistema de ecuaciones ha sido reducido de dos a uno.
2. La matriz de rigidez fue hecha simétrica, esto es,  $K_{ij}=K_{ji}$ . Simetría significa ventajas computacionales, porque sólo la mitad de integrales de rigidez necesitan ser evaluadas y almacenadas. El tipo de simetría está presente en un amplio espectro de fenómenos físicos.
3. Un término frontera fue creado



$$\left[ \left[ -x \frac{dU}{dx} \right] \phi_i \right]_{x_a}^{x_b}$$

Este contiene al flujo

$$\tau = \left[ -x \frac{dU}{dx} \right]$$

y nos facilita aplicar la segunda BC muy fácilmente, por otra parte, la condición frontera BC no se aplica tan fácilmente

**Paso 4:** Desarrolle expresión para la función de prueba  $\phi_i(x)$

En el capítulo anterior consideramos un polinomio para la solución de prueba

$$\tilde{U}(x;a) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_Nx^{N-1} \quad (4.20)$$

con  $N = 3$

$$\tilde{U}(x;a) = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

$$= \sum_{j=1}^3 a_j \phi_j(x) \quad (4.21)$$

las funciones de prueba son por lo tanto

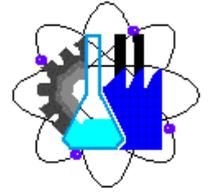
$$\phi_1(x) = 1 \quad \phi_2(x) = x \quad \phi_3(x) = x^2 \quad (4.22)$$

**Paso 5:** Sustituya las funciones de prueba dentro de la matriz de rigidez y los términos de carga en el sistema de ecuaciones y transforme las integrales a una forma apropiada para la evaluación numérica del paso 8

Primero consideramos los términos  $K_{ij}$

$$K_{ij} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_j}{dx} dx$$

las derivadas de las funciones de prueba son de la ecuación



$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dx} &= 0 \\ \frac{d\phi_2}{dx} &= 1 \\ \frac{d\phi_3}{dx} &= 2x\end{aligned}\tag{4.23}$$

\* Note que el término  $\phi_0$  no es necesario en este caso, en la práctica es raramente usado cuando las BC son aplicadas por el método numérico.

Como  $K_{ij}$  es simétrica  $K_{ij} = K_{ji}$ ; necesitamos trabajar los términos  $j \geq i$

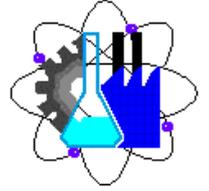
$$\text{Con } i = 1 \quad K_{11} = 0 \quad K_{12} = 0 \quad K_{13} = 0\tag{4.24 a}$$

$$\begin{aligned}K_{22} &= \int_{x_a}^{x_b} (1 \cdot x \cdot 1) dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{x_a}^{x_b} = \frac{1}{2}(x_b^2 - x_a^2) \\ K_{23} &= \int_{x_a}^{x_b} (1 \cdot x \cdot 2x) dx = \left. \frac{2x^3}{3} \right|_{x_a}^{x_b} = \frac{2}{3}(x_b^3 - x_a^3) \\ K_{33} &= \int_{x_a}^{x_b} (2x \cdot x \cdot 2x) dx = \left. x^4 \right|_{x_a}^{x_b} = (x_b^4 - x_a^4)\end{aligned}\tag{4.24 b}$$

entonces

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(x_b^2 - x_a^2) & \frac{2}{3}(x_b^3 - x_a^3) \\ 0 & \frac{2}{3}(x_b^3 - x_a^3) & (x_b^4 - x_a^4) \end{bmatrix}$$

ahora consideraremos los términos  $F_i$  de la ecuación (3.14)



$$F_i = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_i dx - \left[ \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \phi_i \right]_{x_a}^{x_b}$$

que es la suma de una integral en la carga interior  $FI_i$  y en el término frontera  $FB_i$

$$FI_i = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_i dx \qquad FB_i = - \left[ \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \phi_i \right]_{x_a}^{x_b} \qquad (4.25)$$

primero la integral interior

$$i = 1 \qquad F_i = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} (1) dx = -2 \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{x^2} = 2 \left[ \frac{1}{x_b} - \frac{1}{x_a} \right]$$

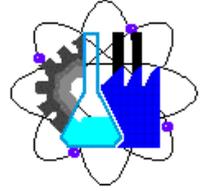
$$i = 1 \qquad F_i = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} (x) dx = -2 \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{x} = -2 \ln \left( \frac{x_b}{x_a} \right) \qquad (4.26)$$

$$i = 1 \qquad F_i = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} (x^2) dx = -2x \Big|_{x_a}^{x_b} = -2(x_b - x_a)$$

ahora el término frontera

$$FB_i = \left[ \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \right]_{x_a} \phi_i(x_a) - \left[ \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \right]_{x_b} \phi_i(x_b) \qquad (4.27 a)$$

la ecuación  $FB_i$  contiene los términos flujo, la evaluación en cada punto la aplicaremos hasta el paso 9, sin embargo los términos  $\phi_i(x_a)$  y  $\phi_i(x_b)$  pueden reemplazarse



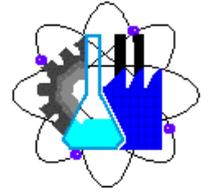
$$\begin{aligned}
 FB_1 &= \left[ \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \right]_{x_a} - \left[ \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \right]_{x_b} \\
 FB_2 &= \left[ \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \right]_{x_a} x_a - \left[ \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \right]_{x_b} x_b^2 \\
 FB_3 &= \left[ \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \right]_{x_a} x_a^2 - \left[ \left( -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right) \right]_{x_b} x_b^2
 \end{aligned} \tag{4.27 b}$$

**Paso 6:** Prepare expresión para el flujo usando las funciones de prueba

$$\begin{aligned}
 \tau &= \text{flujo} = -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \\
 &= -x \sum_{j=1}^3 a_j \frac{d\phi_j}{dx} \\
 &= -a_2 x - 2 a_3 x^2
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Esto completa la primera fase, la cual involucra la preparación teórica 1-6 de todas las ecuaciones necesarias, sustituyendo las ecuaciones de

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(x_b^2 - x_a^2) & \frac{2}{3}(x_b^3 - x_a^3) \\ 0 & \frac{2}{3}(x_b^3 - x_a^3) & (x_b^4 - x_a^4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \left[ \frac{1}{x_b} - \frac{1}{x_a} \right] \\ -2 \ln \frac{x_b}{x_a} \\ -2(x_b - x_a) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right]_{x_a} - \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right]_{x_b} \\ \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right]_{x_a} x_a - \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right]_{x_b} x_b \\ \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right]_{x_a} x_a^2 - \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right]_{x_b} x_b^2 \end{Bmatrix}$$



(4.29)

**Paso 7.** Especifique los datos numéricos del problema

- ❖  Datos geométricos. Especificarlas coordenadas que definen la frontera

$$x_a = 1 \quad x_b = 2 \quad (4.30)$$

- ❖  Para 2D la frontera es una curva. Para 3D la frontera es una superficie
- ❖  Propiedades físicas y cargas aplicadas.

El coeficiente  $x$  a la izquierda de la ecuación gobernante corresponde a una propiedad física.

El término  $2/x^2$  al lado derecho de la ecuación gobernante corresponde a una carga interior

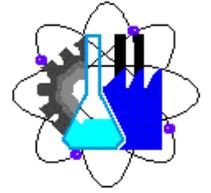
**Paso 8.** Evalúe numéricamente los términos dentro del sistema de ecuaciones (todos excepto los términos BC)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{14}{3} \\ 0 & \frac{14}{3} & 15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \ln 2 \\ -2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right]_{x=1} - \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right]_{x=2} \\ \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right]_{x=1} - 2 \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right]_{x=2} \\ \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right]_{x=1} - 4 \left[ -x \frac{d\tilde{U}}{dx} \right]_{x=2} \end{Bmatrix}$$

(4.31)

El sistema de ecuaciones ahora está casi listo para resolverse sólo las BC's permanecen no especificadas.

**Paso 9.** Aplique las BC's al sistema de ecuaciones las BC's especificadas en cada una de los dos puntos frontera son



$$U(1) = 2 \quad \text{y} \quad \tau = \left[ -x \frac{dU}{dx} \right]_{x=2} = \frac{1}{2}$$

Estos dos puntos frontera serán aplicados al sistema en forma distinta: una será limitada (restringida) y la otra será ilimitada (no restringida) esto será explicado en la siguiente sección.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{14}{3} \\ 0 & \frac{14}{3} & 15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \ln 2 \\ -2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left[ -x \frac{d\mathcal{U}}{dx} \right]_{x=1} - \frac{1}{2} \\ \left[ -x \frac{d\mathcal{U}}{dx} \right]_{x=1} - 1 \\ \left[ -x \frac{d\mathcal{U}}{dx} \right]_{x=1} - 2 \end{Bmatrix}$$

❖ □ Aplicación de las BC's.

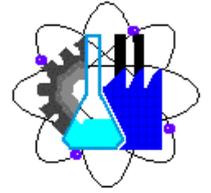
$$\tau = \left[ -x \frac{dU}{dx} \right]_{x=2} = \frac{1}{2} \quad (4.32)$$

El flujo en  $x = 1$ , no tenemos valor numérico especificado para éste término. Observaremos más tarde en el paso 12 que la solución a este problema sólo satisface aproximadamente al flujo BC

$\tau = \left[ -x \frac{dU}{dx} \right]_{x=2} = \frac{1}{2}$ , a pesar del hecho de que sustituimos el valor exacto dentro del sistema de ecuaciones, la solución de prueba y la solución resultante aproximada no están restringidas a satisfacer el flujo BC.

❖ □ Aplicar las BC's  $U(1) = 2$

Observe que no hay términos en el sistema de ecuaciones para los cuales podamos sustituir el valor de 2 de la BC, libramos esto con sólo otra alternativa: Aplicar las BC's directamente a la solución de prueba.



$$\tilde{U}(x; a) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

$$\tilde{U}(x; a) = a_1 + a_2 + a_3 = 2 \quad (4.33)$$

esta es una ecuación de restricción conteniendo  $a_i$  que no son tan independientes así que sólo dos de las  $a_i$  pueden serlo y la tercera ser determinada. Aplicaremos la ecuación de restricción al sistema de ecuaciones procedimiento que involucra manipulación de los números, de aquí, que esta aproximación sea referida como método numérico. No implementaremos el método en una computadora hasta desarrollar el concepto elemento. El sistema de ecuaciones (4. ) asume que  $a_1, a_2, a_3$ , son independientes, por lo tanto debemos eliminar un  $a_i$ , la modificación de (4. ) para eliminar uno de los  $a_i$  implica un procedimiento de tres pasos que demostraremos

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

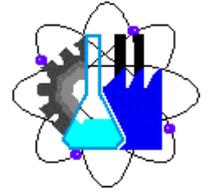
Estas ecuaciones serán modificadas por una ecuación lineal general de restricción

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = d \quad (4.35)$$

**1er. Paso.** Resolver la ecuación de restricción para uno de los términos  $a_i$ , de coeficiente mas grande, escojamos  $a_3$

$$a_3 = \frac{d}{c_3} - \frac{c_1}{c_3} a_1 - \frac{c_2}{c_3} a_2 \quad (4.36)$$

**2do. Paso.** Sustituir  $a_3$  en cada ecuación de la (4. )



$$\begin{aligned}
 K_{11} a_1 + K_{12} a_2 + K_{13} \left[ \frac{d}{c_3} - \frac{c_1}{c_3} a_1 - \frac{c_2}{c_3} a_2 \right] &= F_1 \\
 K_{21} a_1 + K_{22} a_2 + K_{23} \left[ \frac{d}{c_3} - \frac{c_1}{c_3} a_1 - \frac{c_2}{c_3} a_2 \right] &= F_2 \\
 K_{31} a_1 + K_{32} a_2 + K_{33} \left[ \frac{d}{c_3} - \frac{c_1}{c_3} a_1 - \frac{c_2}{c_3} a_2 \right] &= F_3
 \end{aligned}
 \tag{4.37}$$

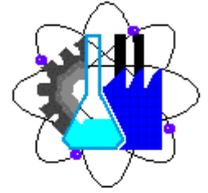
$$\begin{aligned}
 \left[ K_{11} - K_{13} \frac{c_1}{c_3} \right] a_1 + \left[ K_{12} - K_{13} \frac{c_2}{c_3} \right] a_2 &= F_1 - \frac{d}{c_3} K_{13} \\
 \left[ K_{21} - K_{23} \frac{c_1}{c_3} \right] a_1 + \left[ K_{22} - K_{23} \frac{c_2}{c_3} \right] a_2 &= F_2 - \frac{d}{c_3} K_{23} \\
 \left[ K_{31} - K_{33} \frac{c_1}{c_3} \right] a_1 + \left[ K_{32} - K_{33} \frac{c_2}{c_3} \right] a_2 &= F_3 - \frac{d}{c_3} K_{33}
 \end{aligned}
 \tag{4.38}$$

y en forma matricial

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} - K_{13} \frac{c_1}{c_3} & K_{12} - K_{13} \frac{c_2}{c_3} \\
 K_{21} - K_{23} \frac{c_1}{c_3} & K_{22} - K_{23} \frac{c_2}{c_3} \\
 K_{31} - K_{33} \frac{c_1}{c_3} & K_{32} - K_{33} \frac{c_2}{c_3}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 a_1 \\
 a_2
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 F_1 - \frac{d}{c_3} K_{13} \\
 F_2 - \frac{d}{c_3} K_{23} \\
 F_3 - \frac{d}{c_3} K_{33}
 \end{Bmatrix}
 \tag{4.39}$$

Pudimos haber obtenido la ecn. (4.33) por haber realizado las siguientes operaciones columna.

- Multiplicar la tercera columna de los términos rigidez  $K_{i3}$  por  $-c_1/c_3$  y sumar el producto a la primera columna.



- Multiplicar la tercera columna de los términos rigidez  $K_{i3}$  por  $-c_2/c_3$  y sumar el producto a la segunda columna.
- Multiplicar la tercera columna de los términos rigidez  $K_{i3}$  por  $d/c_3$  y restar el producto de los términos  $F_i$ .
- Finalmente, borrar la tercera columna de rigidez  $K_{i3}$  y por lo tanto borrar  $a_3$  también.

**3er. Paso.** Eliminar la ecuación correspondiente ha seleccionado grado de libertad (DOF) (en este caso la 3era. ecuación). Este paso puede ser pensado como una serie de operaciones renglón, como sigue

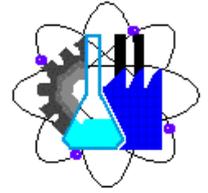
- Multiplique el tercer renglón por  $-c_1/c_3$  y sume el producto al primer renglón.
- Multiplique el tercer renglón por  $-c_2/c_3$  y sume el producto al segundo renglón.
- Finalmente, borre el tercer renglón.

De esto resultan las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cc} \left[ K_{11} - K_{13} \frac{c_1}{c_3} \right] - \frac{c_1}{c_3} \left[ K_{31} - K_{33} \frac{c_1}{c_3} \right] & \left[ K_{12} - K_{13} \frac{c_2}{c_3} \right] - \frac{c_1}{c_3} \left[ K_{32} - K_{33} \frac{c_2}{c_3} \right] \\ \left[ K_{21} - K_{23} \frac{c_1}{c_3} \right] - \frac{c_2}{c_3} \left[ K_{31} - K_{33} \frac{c_1}{c_3} \right] & \left[ K_{22} - K_{23} \frac{c_2}{c_3} \right] - \frac{c_2}{c_3} \left[ K_{32} - K_{33} \frac{c_2}{c_3} \right] \end{array} \right] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \left[ F_1 - \frac{d}{c_3} K_{13} \right] - \frac{c_1}{c_3} \left[ F_3 - \frac{d}{c_3} K_{33} \right] \\ \left[ F_2 - \frac{d}{c_3} K_{23} \right] - \frac{c_2}{c_3} \left[ F_3 - \frac{d}{c_3} K_{33} \right] \end{array} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

ahora, aplicaremos la ecuación de restricción (4.33) para uno de los  $a_i$  en función de las otras

- 1er. Paso  $a_3 = 2 - a_1 - a_2$  (4.41)
- 2do. Paso eliminar  $a_3$  de la ecuación (4.32).



$$\begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} 15 & 0 & -\frac{31}{30} \\ 0 & 0 & \frac{43}{6} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{14}{3} & -\frac{19}{6} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ -\frac{14}{3} & \begin{bmatrix} \frac{31}{3} & -\frac{19}{6} & \frac{43}{6} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{19}{6} & \frac{43}{6} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{19}{6} & \frac{43}{6} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ -15 & \begin{bmatrix} -15 & -\frac{31}{3} & \frac{14}{3} \\ -15 & -\frac{31}{3} & \frac{14}{3} \\ -15 & -\frac{31}{3} & \frac{14}{3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \left[ -\frac{65}{x^2} \frac{dU}{dx} \right]_{x=1} \left[ -x \frac{dU}{2dx} \right]_{x=1} - \frac{3}{2} \\ \left[ \frac{71}{x} \frac{dU}{dx} \right]_{x=1} \left[ \frac{2 \ln 2}{x} \frac{dU}{dx} \right]_{x=1} - \frac{31}{3} \ln 2 - 1 - \frac{14}{3} (2) \\ \left[ -x \frac{dU}{dx} \right]_{x=1} \left[ x \frac{dU}{dx} \right]_{x=1} - 4 - 15 (2) \end{array} \right.$$

Una comparación de las ecuaciones (4.41) y (4.36) muestra que  $c_1/c_3 = 1$ ;  $c_2/c_3 = 1$  y  $d/c_3 = 2$ .

Por último aplicamos el 2do. Paso antes descrito

$$(4.42)$$

$$(4.43)$$

$$(4.44)$$

□ 3er. Paso. Eliminar la tercera ecuación de la expresión (4.42) Usamos de nuevo  $c_1/c_3 = 1$ ;  $c_2/c_3 = 1$

$$= 3.719; \quad ; \quad (4.45)$$

$$(4.46)$$

Paso 11. Evaluar el flujo

$$(4.47)$$

Paso 12. Graficar la solución y estimar exactitud

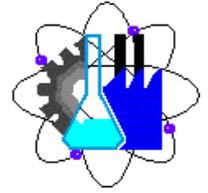
## CAPÍTULO 4

### TERMINOLOGÍA Y CONCEPTOS

Considere un problema de valor frontera en el cual la ecuación diferencial gobernante es de orden  $2m$ , donde  $m$  es entero

$$(5.1)$$

la derivada de mas alto orden es par 2,4,6,8... Consideramos derivadas de alto orden porque estas son



representativas de la teoría de campos, las cuales son virtualmente la sal y la pimienta de las aplicaciones en la Ingeniería.

Un problema de valor frontera de orden  $2m$  requiere de  $m$  condiciones frontera BC a ser especificadas en cada punto frontera.

Clasificación de las condiciones frontera

1. BC esenciales. Es una ecuación que relaciona los valores de  $U$  y/o cualquiera de sus derivadas, arriba del orden  $m-1$  en puntos sobre la frontera.
2. BC natural. Es una ecuación que relaciona los valores de las derivadas de  $U$  de orden  $m$  a  $2m-1$ , en puntos sobre la frontera.

BC esencial algunas veces referidas como BC Dirichlet

BC natural algunas veces referidas como BC Neumann

Ecuaciones de segundo orden  $m=1$  Tipo de BC Valores frontera especificados por Esencial UNatural

Ejemplos: elasticidad, acústica, dinámica de fluidos y electromagnetismo.

Ecuaciones de segundo orden  $m=2$  Tipo de BC Valores frontera especificados por Esencial U, Natural

$$\frac{d^3U}{dx^3}, \quad \frac{d^3U}{dx^3}$$

Ejemplos: teoría de vigas, teoría de chapas y escudos.

## EL CONCEPTO ELEMENTO

### 3.1 PROBLEMA ILUSTRATIVO

Analizaremos el mismo problema ilustrativo descrito en las secciones 3 y 4 por conveniencia

Ecuación diferencial y dominio

$$\frac{d^3U}{dx^3} \quad 5.1$$

En esta sección haremos que el dominio completo sea un elemento. Mas adelante haremos que el dominio esté formado por dos elementos, construiremos una solución de prueba para cada elemento.

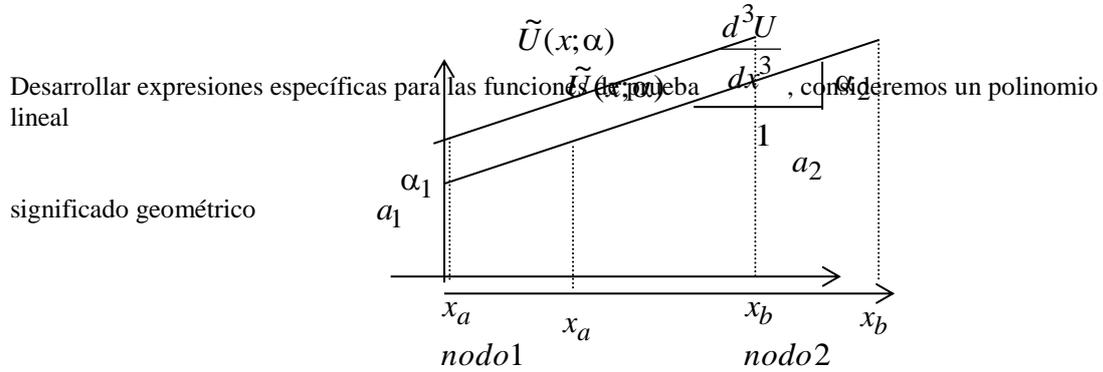
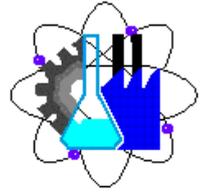
En la presente solución de un elemento de nuevo usaremos una solución de prueba polinomial como fue usada en los dos capítulos anteriores, pero los términos serán re arreglados en una forma especial, seguiremos con el mismo procedimiento de los doce pasos introducidos en el capítulo 4.

Paso 1 a 3

Los tres primeros pasos siguen siendo los mismos que en el capítulo 4. Estos pasos culminan con las ecuaciones (4.11) a la (4.16).

Usaremos la notación general  $\frac{d^3U}{dx^3}$

Paso 4



FEM requiere que el polinomio sea escrito en la forma de una interpolación polinomial cuyo principio dice  
 "Cada parámetro  $\alpha_i$  debe representar el valor de una solución de prueba en un punto específico en el elemento, a cada punto se le llama nodo".

En la figura los parámetros  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son definidos así para satisfacer el principio definido anteriormente, por lo tanto

$$5.3$$

sustituyendo (5.3) en (5.2)

$$5.4$$

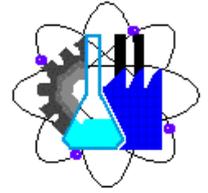
Resolviendo para  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  en términos de  $a_1$  y  $a_2$

$$5.5$$

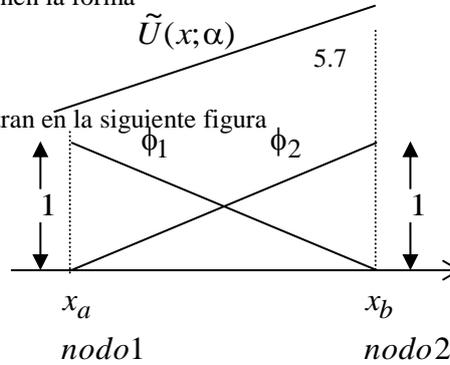
sustituyendo (5.5) dentro de (5.2) tenemos

$$5.6$$

combinando coeficientes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  obtenemos



donde las funciones de prueba tienen la forma



las funciones de prueba se muestran en la siguiente figura

satisfacen las siguientes propiedades importantes de los puntos frontera del elemento

$$y \quad 5.8$$

Paso 5

Sustituya las funciones de prueba en los términos de rigidez y carga, y transforme las integrales a una forma apropiada para evaluación numérica.

Si las soluciones de prueba son dos funciones, entonces el sistema de ecuaciones con  $N=2$  es:

$$5.9a$$

$$5.9b$$

las derivadas de las funciones de prueba se obtienen de (5.7b)

$$5.10$$

de aquí que los términos de rigidez sean

$$5.11$$

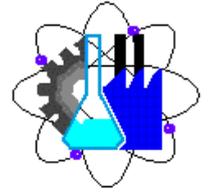
los términos de carga interior FI son

$$FI_1 = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \left[ - \frac{x_b - x}{x_b - x_a} \right] dx = - \frac{2}{x_a} + \frac{2}{x_b - x_a} \ln \frac{x_b}{x_a}$$

$$FI_2 = \frac{2}{x_b} - \frac{2}{x_b - x_a} \ln \frac{x_b}{x_a}$$

$$5.12$$

los términos de carga frontera son



$$FI_1 = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \left[ - \frac{x_b - x}{x_b - x_a} \right] dx = - \frac{2}{x_a} + \frac{2}{x_b - x_a} \ln \frac{x_b}{x_a}$$

$$FI_2 = \frac{2}{x_b} - \frac{2}{x_b - x_a} \ln \frac{x_b}{x_a} \quad 5.13$$

Paso 6

Prepare la expresión del flujo usando las funciones de prueba

$$FI_1 = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \left[ - \frac{x_b - x}{x_b - x_a} \right] dx = - \frac{2}{x_a} + \frac{2}{x_b - x_a} \ln \frac{x_b}{x_a}$$

$$FI_2 = \frac{2}{x_b} - \frac{2}{x_b - x_a} \ln \frac{x_b}{x_a} \quad 5.14$$

sustituyendo (5.11), (5.12) y (5.13) en la ecuación (5.9a)

$$FI_1 = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \left[ - \frac{x_b - x}{x_b - x_a} \right] dx = - \frac{2}{x_a} + \frac{2}{x_b - x_a} \ln \frac{x_b}{x_a}$$

$$FI_2 = \frac{2}{x_b} - \frac{2}{x_b - x_a} \ln \frac{x_b}{x_a} \quad 5.15$$

Paso 7

Especificar los datos numéricos del problema

1. Datos geométricos.- Para el presente análisis de un elemento, los únicos datos geométricos son las dos coordenadas de los puntos frontera

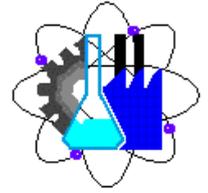
$$FI_1 = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \left[ - \frac{x_b - x}{x_b - x_a} \right] dx = - \frac{2}{x_a} + \frac{2}{x_b - x_a} \ln \frac{x_b}{x_a}$$

$$FI_2 = \frac{2}{x_b} - \frac{2}{x_b - x_a} \ln \frac{x_b}{x_a} \quad 5.16$$

2. Propiedades físicas y cargas aplicadas, vease paso 7 de la sección 4

Paso 8

Evaluar numéricamente los términos interiores de la ecuación de elementos.  
Sustituyendo (5.16) en (5.15) tenemos



$$FI_1 = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \left[ - \frac{x_b - x}{x_b - x_a} \right] dx = - \frac{2}{x_a} + \frac{2}{x_b - x_a} \ln \frac{x_b}{x_a}$$

$$FI_2 = \frac{2}{x_b} - \frac{2}{x_b - x_a} \ln \frac{x_b}{x_a}$$

5.17

Paso 9

Aplicar las condiciones frontera, sustituimos  $\tau(2) = 1/2$

5.18

la condición frontera esencial  $U(1) = 2$  es una condición frontera restringida, así que debemos restringir la solución de prueba para satisfacer la BC, por lo tanto hacemos

5.19

por la propiedad de interpolación la ecuación (5.19) se reduce a

$a_1 = 2$

5.20

la ecuación (5.20) es la ecuación de restricción que puede ser aplicada a la ecuación (5.18) con las operaciones renglón columna. El parámetro  $a_i = d$  es sólo asignado a la condición frontera esencial. Esta ecuación está en la más simple forma, así que las operaciones renglón columna la reducen a dos simples operaciones.

1.- Multiplique la columna  $i$  en la matriz  $[K]$  por  $d$  y reste el producto al vector de carga; entonces borre la columna  $i$  (y por lo tanto borre  $a_i$  también)

2.- Borre el renglón  $i$  en la matriz  $[K]$  y en el vector de carga.

Aplicando la ecuación de restricción (5.20) a la ecuación (5.18) en la forma anterior descrita, la primera de las dos ecuaciones es eliminada y nos quedaremos sólo con la segunda, en la siguiente forma (el lector debe de verificar)

Paso 10

Resolvemos el sistema de ecuaciones

5.21

El parámetro  $a_1 = 2$  ya había sido determinado por la condición frontera esencial, ecn (5.20) Sustituyendo las ecns. (5.20) y (5.21) en (5.7) nos lleva a la solución aproximada

5.22

Paso 11

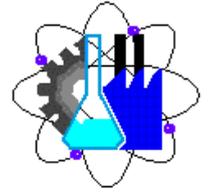
Evaluar el flujo  
De la ecn. (5.14)

5.23

Paso 12

Graficar la solución y estimar su exactitud

Debe hacerse notar que esta solución es idéntica a la solución de la ecuación solución de prueba, al final



del capítulo anterior empleando los 12 pasos. Esto se esperaba porque usamos en la solución de prueba el mismo polinomio lineal, aunque en diferente forma algebraica.

La única evidencia que tenemos acerca de la exactitud es el error en la BC no restringida en  $x = 2$ .

El valor calculado es  $U(2) = 1.36$  mientras que el valor exacto es  $U(2) = 1$ , un error del 36%. Para estimar la exactitud de  $U(x)$  y la exactitud de  $U'(x)$  en cualquier lugar del dominio, necesitamos generar otra solución de aproximación. Lo cual, haremos en la próxima sección particionando el dominio en dos elementos.

### 3.2 SOLUCIÓN DE ELEMENTOS

(ensamble de ecuaciones de elementos)

El dominio del problema es de  $x \in [0, 2]$  particionando en dos piezas o subdominios

cada subdominio es llamado un elemento, no hay espacio entre los elementos, no hay traslape. (el dominio es la suma de los dos elementos)

Las soluciones de prueba para los dos elementos, serán etiquetadas como  $U_1(x)$  y  $U_2(x)$  respectivamente. La solución exacta dentro del elemento 1 será  $U_1(x)$  y la solución exacta dentro del elemento 2 será  $U_2(x)$ .

Las ecuaciones diferenciales gobernantes para cada elemento podrían entonces ser escritas como (5.24)

necesitamos establecer la continuidad entre  $U_1$  y  $U_2$  en el punto  $x = x_p$  integrando ambos lados de la ecn. (3.24) sobre un intervalo

$$\int_{x_{p-\epsilon}}^{x_{p+\epsilon}} \frac{d}{dx} \left[ x \frac{dU}{dx} \right] dx = \int_{x_{p-\epsilon}}^{x_{p+\epsilon}} \frac{2}{x^2} dx \quad (5.26)$$

nos lleva a

$$\left[ x \frac{dU}{dx} \right]_{x_{p-\epsilon}}^{x_{p+\epsilon}} = \left[ \frac{2}{x} \right]_{x_{p-\epsilon}}^{x_{p+\epsilon}} \quad (5.27)$$

$$\left[ x \frac{dU}{dx} \right]_{x_{p+\epsilon}} - \left[ x \frac{dU}{dx} \right]_{x_{p-\epsilon}} = - \left[ \frac{2}{x_{p+\epsilon}} \right] + \left[ \frac{2}{x_{p-\epsilon}} \right] \quad (5.28)$$

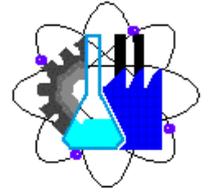
haciendo que  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\left[ x \frac{dU}{dx} \right]_{x_p^+} = \left[ x \frac{dU}{dx} \right]_{x_p^-} \quad (5.28)$$

e integrando de nuevo tenemos que  $U$  es continua en cualquier punto de  $x_p$

$$U(x_p^+) = U(x_p^-) \quad (5.29)$$

y para cualquier punto en particular  $x_c$ , podemos escribir  $U^{(1)}$  para cualquier punto a la



izquierda y  $U^{(2)}$  para cualquier punto a la derecha, entonces las ecns. (5.27) y (5.28) pueden ser escritas

*Condiciones frontera Interelemento IBC*

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{c} -x \frac{dU^{(1)}}{dx} \\ U^{(1)} \end{array} \right]_{x_c} = \left[ \begin{array}{c} -x \frac{dU^{(2)}}{dx} \\ U^{(2)} \end{array} \right]_{x_c} \\
 & \left( -x \frac{dU^{(1)}}{dx} \right)_{x_c} = \left( -x \frac{dU^{(2)}}{dx} \right)_{x_c} \quad \left( U^{(1)} \right)_{x_c} = \left( U^{(2)} \right)_{x_c}
 \end{aligned}$$

*Condiciones frontera BC*

$$\left( -x \frac{dU^{(1)}}{dx} \right)_{x_a} = 2 \quad \left( -x \frac{dU^{(2)}}{dx} \right)_{x_b} = \frac{1}{2}$$

(5.30)

$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dU^{(1)}}{dx} \right)_{x_c} = \frac{2}{x_c^2} \quad \frac{d}{dx} \left( x \frac{dU^{(2)}}{dx} \right)_{x_c} = \frac{2}{x_c^2}$

Condiciones frontera Inter elemento IBCs

### Pasos 1 al 6

**Elemento (1).**- Usaremos la misma solución de prueba de la sección anterior

$$\tilde{U}^{(1)}(x; a) = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x)$$

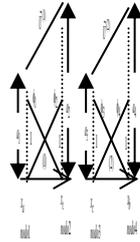
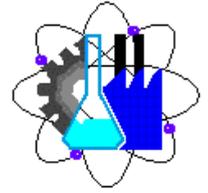
donde

$$\phi_1(x) = \frac{x_c - x}{x_c - x_a} \quad \phi_2(x) = \frac{x - x_a}{x_c - x_a}$$

(5.31)

$\tilde{U}^{(1)}(x; a)$  es la solución del elemento de prueba para el elemento (1) diferencias

- 1.- Notación  $U$  y  $\tilde{U}$  cambian a  $U^{(1)}$  y  $\tilde{U}^{(1)}$  respectivamente y  $x_b$  cambia a  $x_c$
- 2.- Condiciones frontera en el interelemento, BC en  $x_b$  (ahora  $x_c$ ) cambia a dos IBCs



Funciones de prueba y solución de prueba para los elementos (1) y (2)

De las ecns. (5.15) hacemos los cambios notacionales de  $\tilde{U}$  y  $\tilde{U}^{(1)}$  y  $x_b$  a  $x_c$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{x_c + x_a}{x_c - x_a} & -\frac{1}{2} \frac{x_c + x_a}{x_c - x_a} \\ -\frac{1}{2} \frac{x_c + x_a}{x_c - x_a} & \frac{1}{2} \frac{x_c + x_a}{x_c - x_a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{x_a} + \frac{2}{x_c - x_a} \ln \frac{x_c}{x_a} \\ \frac{2}{x_a} - \frac{2}{x_c - x_a} \ln \frac{x_c}{x_a} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left[ -x \frac{d\tilde{U}^{(1)}}{dx} \right]_{x_a} \\ -\left[ -x \frac{d\tilde{U}^{(1)}}{dx} \right]_{x_c} \end{Bmatrix}$$

(5.32)

ecuaciones de elemento para el elemento (1) que simbólicamente pueden ser escritas como

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

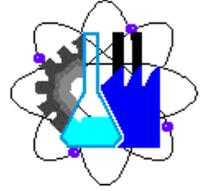
(5.32)

la ecn. (5.32) completa los pasos 1 a 6. Para el paso 6 debemos escribir la expresión general del flujo en el elemento (1) usando (5.31a)

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}^{(1)}(x; a) &= -x \frac{d\tilde{U}^{(1)}(x; a)}{dx} = -x \left[ a_1 \frac{d\phi_1(x)}{dx} + a_2 \frac{d\phi_2(x)}{dx} \right] \\ &= \frac{a_1 - a_2}{x_c - x_a} x \end{aligned}$$

(5.34)

## Elemento (2)



$$\tilde{U}^{(2)}(x; a) = a_3\phi_3(x) + a_4\phi_4(x)$$

donde

$$\phi_3(x) = \frac{x_b - x}{x_b - x_c} \quad \phi_4(x) = \frac{x - x_c}{x_b - x_c} \quad (5.35)$$

$\tilde{U}^{(2)}(x; a)$  es la solución del elemento de prueba para el elemento (2)

haciendo los cambios de notación de  $\tilde{U}$  y  $\tilde{U}^{(2)}$  y  $x_a$  a  $x_c$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{x_b + x_c}{x_b - x_c} & -\frac{1}{2} \frac{x_b + x_c}{x_b - x_c} \\ -\frac{1}{2} \frac{x_b + x_c}{x_b - x_c} & \frac{1}{2} \frac{x_b + x_c}{x_b - x_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{x_c} + \frac{2}{x_b - x_c} \ln \frac{x_b}{x_c} \\ \frac{2}{x_b} - \frac{2}{x_b - x_c} \ln \frac{x_b}{x_c} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left[ -x \frac{d\tilde{U}^{(2)}}{dx} \right]_{x_c} \\ \left[ -x \frac{d\tilde{U}^{(2)}}{dx} \right]_{x_b} \end{Bmatrix} \quad (5.36)$$

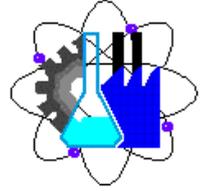
y escrita simbólicamente como

$$\begin{bmatrix} K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (5.37)$$

la ecuación para el flujo del elemento (2)

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}^{(2)}(x; a) &= -x \frac{d\tilde{U}^{(2)}(x; a)}{dx} = -x \left[ a_3 \frac{d\phi_3(x)}{dx} + a_4 \frac{d\phi_4(x)}{dx} \right] \\ &= \frac{a_3 - a_4}{x_b - x_c} x \end{aligned} \quad (5.38)$$

el conjunto de las cuatro ecuaciones escritas juntas en forma matricial como



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{x_c + x_a}{x_c - x_a} & -\frac{1}{2} \frac{x_c + x_a}{x_c - x_a} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{x_c + x_a}{x_c - x_a} & \frac{1}{2} \frac{x_c + x_a}{x_c - x_a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{x_b + x_c}{x_b - x_c} & -\frac{1}{2} \frac{x_b + x_c}{x_b - x_c} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{x_b + x_c}{x_b - x_c} & \frac{1}{2} \frac{x_b + x_c}{x_b - x_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} -\frac{2}{x_a} + \frac{2}{x_c - x_a} \ln \frac{x_c}{x_a} \\ \frac{2}{x_c} - \frac{2}{x_c - x_a} \ln \frac{x_c}{x_a} \\ -\frac{2}{x_c} + \frac{2}{x_b - x_c} \ln \frac{x_b}{x_c} \\ \frac{2}{x_b} - \frac{2}{x_b - x_c} \ln \frac{x_b}{x_c} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left[ -x \frac{d\tilde{U}^{(1)}}{dx} \right]_{x_a} \\ -\left[ -x \frac{d\tilde{U}^{(1)}}{dx} \right]_{x_c} \\ \left[ -x \frac{d\tilde{U}^{(2)}}{dx} \right]_{x_c} \\ -\left[ -x \frac{d\tilde{U}^{(2)}}{dx} \right]_{x_b} \end{Bmatrix}$$

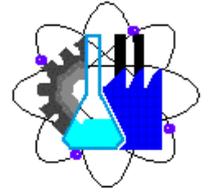
(5.39)

y en forma simbólica

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

### Pasos 7 al 12

Cómputo numérico, incluyendo ensamble de ecuaciones de elementos separados



### Paso 7

Especificar datos numéricos del problema

1.- datos geométricos

$$\begin{array}{llll} x_a = 1; & x_c = 3/2; & x_b = 2; & \\ \text{nodo 1} & \text{en } x_a = 1 & & \\ \text{nodo 2 y 3} & \text{en } x_c = 3/2 & & \\ \text{localización de nodos} & \text{nodo 4} & \text{en } x_b = 2 & (5.41) \end{array}$$

los nodos y elementos colectivamente son referidos como malla.

---

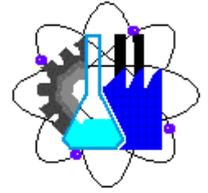
## CAPÍTULO 5

### MECANICA DE LA FRACTURA

La **Fractura** es un fenómeno que ha recibido atención constante y practica principalmente desde que se comenzaron a utilizar en gran escala máquinas y estructuras cuya función principal es la de resistir y transmitir una carga o presión. En particular, el uso de componentes metálicos, como puentes, edificios, aviones, barcos, etc. Siempre ha sido acompañado del riesgo fractural, y la fractura de estas grandes estructuras frecuentemente es acompañada de perdidas materiales, económicas y humanas. Es común también que aunque muchas fallas ocurran una sola vez en toda una vida, una sola falla puede significar una catástrofe, como es el caso de los accidentes aeronáuticos, las explosiones en grandes ductos de combustibles o las fallas de reactores nucleares.

La integridad de una estructura está estrechamente ligada a la presencia de defectos que se traducen en grietas. Luego, los criterios de diseño basados en el esfuerzo máximo admisible o esfuerzo de fluencia no son suficientes para analizar estructuras fisuradas. La Mecánica de Fractura se dividirá a su vez en Lineal Elástica y Elastoplástica, de acuerdo con criterios basados en el tamaño de la zona de fluencia que presenta la punta de la grieta.

La mecánica de fractura y particularmente la mecánica de fractura lineal elástica (“Linear Elastic Fracture Mechanics”, LEFM) es la ciencia que estudia los mecanismos y procesos de propagación de grieta en sólidos, así como la distribución de tensiones y deformaciones que ocurren en un

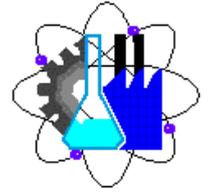


material agrietado o con discontinuidades, sometido a cierta tensión externa. Esta ciencia surgió con los trabajos fundamentados de Griffith (1921-1924) sobre criterios de propagación de grietas en sólidos, basados en conceptos de transformación de energía elástica en energía de superficie y por esta razón se le conoce como una formulación de energía de la mecánica de fractura.

En términos simples la formulación energética de la mecánica de fractura consiste en comparar la energía disponible para la propagación de una grieta en una estructura con la energía necesaria para producir su agrietamiento. La energía disponible para el avance de grieta por la unidad de área se denomina liberación de energía ( $G$ ) y la energía necesaria para el agrietamiento se denomina tasa crítica de liberación de energía o energía de agrietamiento ( $G_{IC}$ ). La teoría de Griffith de la fractura frágil nos ayuda a entender porqué la fractura frágil ocurre en un material. Asimismo, como veremos más adelante, Irwin tomó el trabajo de Griffith y lo aplicó a los materiales dúctiles, que es también beneficioso. También el trabajo en las áreas de la concentración de la fatiga y de la tensión nos ha permitido hacer más avances por lo que las aplicaciones de materiales específicos.

Irwin (1957) introdujo un avance importante en la mecánica de fractura ya que planteó el análisis en términos de tensiones (formulación tensional), lo cual no se había podido hacer anteriormente debido a que teóricamente en la punta de una grieta las tensiones tienden a infinito, independientemente de la magnitud de la carga aplicada. Para su formulación, Irwin plantea que el proceso de fractura no puede concentrarse en un solo punto, como se deduciría de un análisis netamente elástico, sino que se presenta en una zona pequeña pero finita, que denomina *zona plástica* en la cual, las tensiones ya dejan de ser una zona infinitas por que parte de la energía elástica se consume en la deformación plástica del material próximo a la punta. El concepto principal introducido aquí es el de *factor de intensidad de tensiones* ( $K$ ), de gran aplicación en la mecánica de fractura. El parámetro  $K$  esta relacionado con el parámetro, mediante las propiedades elásticas del material y para la condición de inicio de grieta se considera que  $K$  adquiere un valor crítico y por tal razón se denomina factor de intensidad de tensiones críticos o tenacidad a la fractura  $K_{IC}$ .

A pesar de que la LEFM ha sido desarrollada principalmente para el estudio de fracturas en materiales frágiles o cuasifrágiles de alta resistencia como el hormigón, el acero y aleaciones industriales, sus importantes desarrollos teóricos y experimentales no deben despreciarse para



analizar comportamientos similares en otros materiales mucho menos resistentes y rígidos, como los suelos arcillosos. algunas investigaciones relativamente recientes han elaborado la LEFM para estudiar fenómenos de agrietamiento de arcillas, por ejemplo Lee et al (1988) Morris et al (1992), Honrad & Ayad (1997a), Ávila et al (2002), etc.

Uno de los aspectos importantes que hacen diferente un análisis convencional de resistencia de materiales a otro de mecánica de fractura es que en el primer caso la resistencia o tensión de rotura es independiente del tamaño de la fractura o elemento sometido a carga, mientras que en el segundo, la resistencia puede variar en función del tamaño (Bazant, 1984) y permite conocer si un determinado material se ajusta o no a los criterios de la LEFM o si es necesario introducir correcciones por efecto de tamaño a los parámetros  $G_{IC}$  y  $K_{IC}$  para que pueda considerarse verdaderas constantes del material, independiente de su tamaño.

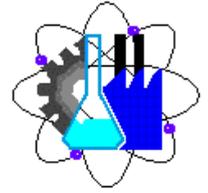
### **Trabajo de Griffith**

- A. A. Griffith comenzó su trabajo adentro alrededor de los años 20. En este tiempo, fue aceptado que la fuerza teórica de un material fue tomada para ser  $E/10$ , donde  $E$  es el módulo de Young para el material particular. Él consideraba solamente los materiales elásticos, frágiles, en los cuales ninguna deformación plástica ocurrió. Sin embargo, fue observado que los valores verdaderos de la fuerza crítica eran tanto como 1000 veces menos que este valor predicho, y Griffith se propuso investigar esta discrepancia. Él descubrió que había muchas grietas microscópicas en cada material que estaban presentes siempre. Él afirmó que estas grietas pequeñas bajaban la fuerza total del material.

### **Trabajo de Irwin**

- B. El trabajo de Griffith era significativo, no obstante no incluyó los materiales dúctiles en su consideración. Otro hombre, G.R. Irwin, en los años 50, comenzó a ver cómo la teoría se aplicaría a los materiales dúctiles. Él se determinó que había también cierta energía de la deformación plástica que tuvo que ser agregada a la energía de tensión considerada originalmente por Griffith para que la teoría trabajara para los materiales dúctiles también, creando qué se conoce como la tarifa de lanzamiento de la energía de tensión.

## **Conceptos de Energía para Fractura**



**Fractura** se define como la culminación del proceso de deformación plástica. Se manifiesta como la separación o fragmentación de un cuerpo sólido en dos o más partes bajo la acción de un estado de cargas.

Para fracturar un material se requiere incrementar la carga progresivamente hasta que un proceso de nucleación y propagación de la grieta ocurra. Dependiendo de las condiciones de carga geométrica del cuerpo y propiedades mecánicas del material, para fracturar un componente estructural puede ser necesario sostener e incluso incrementar la carga después de la iniciación de la grietas.

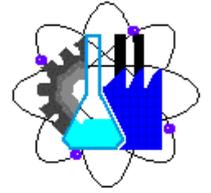
Frecuentemente las fallas por fractura de componentes estructurales son precedidas por la existencia de grietas, las cuales pueden provenir de fabricación o ser generadas en servicio. La mecánica de fractura tiene como propósito estudiar la capacidad de soporte de carga de componentes estructurales, siendo de especial importancia cuando se emplean materiales de alta resistencia, con los cuales la carga crítica de falla por crecimiento inestables de una grieta usualmente es menor que la carga de falla por fluencia generalizada.

La fractura de un material depende totalmente de las fuerzas externas e internas que existen entre los átomos es precisamente hay donde se origina una fuerza teórica que se llamada del módulo elástico del material. Las fuerzas experimental medidas de la fractura de los materiales se encuentran para ser 10 a 1000 veces debajo de este valor teórico.

#### **4.1 Bases teóricas**

En este tema se presentan las definiciones y conceptos de las metodologías usadas para la predicción de vida de los alabes. Primeramente se define el método para determinar la iniciación de la grieta por *Aproximación de esfuerzo deformación local*. Posteriormente se describe *Mecánica de fractura* por medio de la cual se determinara la propagación de la grieta hasta presentarse la fractura. Finalmente se presenta el método de elemento finito para calcular los parámetros de fractura, como el factor de intensidad de esfuerzo en la región de la grieta, para utilizarlo en predicciones analíticas con las que se calcula la razón de crecimiento de la grieta.

#### **4.2 Aproximación de esfuerzo deformación local.**



En esta parte se definirá el método para determinar el tiempo en que iniciará la grieta. Este análisis se realiza con base a las condiciones de trabajo y las propiedades físicas y mecánicas de los alabes en las turbinas de vapor, por lo tanto los datos utilizados son los que se han obtenido experimentalmente y se encuentran registrados en libros para diferentes materiales. La teoría para la iniciación de grieta se llama *aproximación de esfuerzo deformación local*.

El concepto de esfuerzo local y deformación local es la aproximación más prometedora para predecir la iniciación de la grieta en cuerpos sujetos a cargas de fatiga. La aproximación se basa sobre la suposición (Morrow y otros, 1973) de que la fatiga local resultante del material en un punto crítico, como una fisura o algún otro defecto que es la localización de la iniciación de la grieta, es análoga a la fatiga resultante de un pequeño espécimen liso sujeto a los mismos esfuerzos y deformaciones cíclicos. Neuber en 1961 presentó análisis en miembros donde la iniciación de la grieta toma lugar en puntos de incremento de esfuerzos, el esfuerzo nominal y local son relacionados por una resistencia elasto-plástica. Las deformaciones cíclicas en la localización del inicio de la grieta no se pueden medir, en cambio las deformaciones nominales si son medidas en estos puntos. Por otra parte se pueden medir las fuerzas externas aplicadas y los esfuerzos pueden ser calculados por medio de programas de elemento finito.

La regla de Neuber proporciona la relación entre los factores de concentración de esfuerzo y deformación local y el factor de concentración de esfuerzo teórico.

$$K_t = \sqrt{K_\varepsilon K_\sigma}$$
$$K_t = \sqrt{\frac{\varepsilon}{e} \frac{\sigma}{S}} \quad (1)$$

donde  $K_t$  = Factor de concentración de esfuerzo teórico

$K_\varepsilon$  = Factor de concentración de deformación local

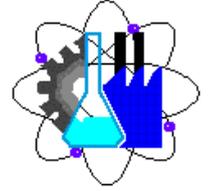
$K_\sigma$  = Factor de concentración de esfuerzo local

$e$  = Deformación nominal

$\varepsilon$  = Deformación local

$\sigma$  = Esfuerzo local

$S$  = Esfuerzo nominal



Sustituyendo  $\frac{S}{e} = E$  en la ecuación (1), se tiene

$$K_t = \sqrt{\frac{E \varepsilon \sigma}{S S}}$$

$$\frac{(K_t S)^2}{E} = \varepsilon \sigma \quad (2)$$

E = Modulo de Young.

Conociendo esta regla, se modifica para considerar el análisis aplicando cargas a fatiga (Topper y otros, 1969), usando el factor de concentración de esfuerzo a la fatiga  $K_f$  y los rangos de esfuerzo-deformación local y nominal.

$$K_f = \sqrt{\frac{\Delta \varepsilon \Delta \sigma}{\Delta e \Delta S}}$$

Obteniéndose 
$$\frac{(K_f \Delta S)^2}{E} = \Delta \varepsilon \Delta \sigma \quad (3)$$

donde  $\Delta S$  = intervalo de esfuerzo

Martín y otros en 1969, sugirieron que para cargas uniaxiales, una resultante de histéresis estable se puede describir por una deformación cíclica sumando los rangos elásticos y plásticos.

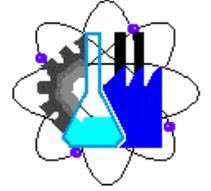
$$\frac{1}{2} \Delta \varepsilon = \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_e + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_p \quad (4)$$

donde  $\Delta \varepsilon$  = Rango de deformación local

$\Delta \varepsilon_e$  = Parte elástica del rango de deformación

$\Delta \varepsilon_p$  = Parte plástica del rango de deformación

Sustituyendo la ecuación que describe la región plástica  $\sigma = K \varepsilon^n$ , en la ecuación (4) se tiene



$$\frac{1}{2}\Delta\varepsilon_p = \frac{1}{2E}\Delta\sigma + \left(\frac{1}{2K'}\Delta\sigma\right)^{1/n'} \quad (5)$$

donde  $K'$  = Coeficiente de resistencia cíclica

$n'$  = Exponente de dureza a la deformación cíclica

$\Delta\sigma$  = Rango de esfuerzo local

Un método indirecto para determinar el esfuerzo local en un punto crítico se puede utilizar. Consiste en sustituir la ecuación (5) (Martín y otros, 1969), en la regla de Neuber dada en la ecuación (3). Obteniéndose la ecuación (6) que permite determinar el rango del esfuerzo real por medio de un proceso de iteración simple.

$$\Delta\sigma \left[ \frac{1}{E}\Delta\sigma + 2\left(\frac{1}{2K'}\Delta\sigma\right)^{1/n'} \right] = \frac{(K_f\Delta S)^2}{E} \quad (6)$$

La vida de esfuerzo para una parte elástica de la amplitud de deformación se determina a través de la prueba por Basquin en 1910.

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma = \sigma_f' (2N_i)^b \quad (7)$$

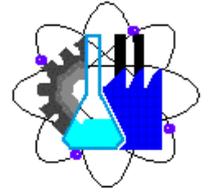
donde  $\sigma_f'$  = Coeficiente de resistencia a la fatiga.

$b$  = Exponente de resistencia a la fatiga.

$2N_i$  = Numero de esfuerzos reversibles para la falla.

El coeficiente de resistencia a la fatiga para el material se da por las amplitudes de esfuerzos reales para la falla del espécimen bajo un esfuerzo reversible. En términos del rango de deformación elástica, la ecuación (7) es

$$\frac{1}{2}\Delta\varepsilon_e = \frac{1}{E}\sigma_f' (2N_i)^b \quad (8)$$



Se tiene otra relación (Manson, 1953 y Coffin, 1954) de amplitud de deformación plástica estable contra el número de esfuerzos reversibles para la falla en la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2}\Delta\varepsilon_p = \varepsilon'_f \sigma'_f (2N_i)^c \quad (9)$$

donde  $\varepsilon'_f$  = Coeficiente de ductilidad a la fatiga.

$c$  = Exponente de ductilidad a la fatiga.

Sustituyendo las ecuaciones (7) y (9) en (4) se obtiene

$$\frac{1}{2}\Delta\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma'_f (2N_i)^b + \varepsilon'_f (2N_i)^c \quad (10)$$

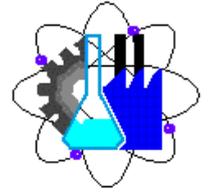
El coeficiente de ductilidad a la fatiga para el material es dado por la amplitud de deformación plástica requerida para la falla del espécimen bajo carga reversible. El coeficiente de resistencia a la falla y el exponente de ductilidad a la fatiga también se determinan experimentalmente.

Extensos estudios de esfuerzo medio se llevaron a cabo por Topper y Sandor en 1968. Realizaron pruebas de esfuerzos medios de tensión y compresión sobre especímenes lisos y pre-deformados cíclicamente. Ellos encontraron la siguiente ecuación para esfuerzos medios y completamente reversibles.

$$\frac{1}{2}\Delta\varepsilon_r = \frac{1}{2}\Delta\varepsilon + \frac{1}{E}\sigma_m^a \quad (11)$$

donde  $\frac{1}{2}\Delta\varepsilon_r$  = Amplitud de deformación reversible equivalente.

La ecuación (11) define completamente la amplitud de deformación reversible que debe dar la misma vida cuando la amplitud de deformación  $\frac{1}{2}\Delta\varepsilon$ , coexiste con el esfuerzo medio  $\sigma_m$ . El exponente  $a$  se reporta con un valor de 0.73 para aluminio 2024-T4 y 0.89 para acero SAE 4340.



Se sugiere que el exponente  $a$  se puede tomar como la unidad y el efecto del esfuerzo medio ser incluido modificando la ecuación (10) obteniéndose

$$\frac{1}{2} \Delta \varepsilon = \frac{1}{E} [\sigma_f' - \sigma_m] (2N_i)^b + \varepsilon_f' (2N_i)^c \quad (12)$$

La ecuación anterior se utilizará para determinar el número de ciclos del esfuerzo reversible para que se presente la grieta.

### 4.3 Mecánica de fractura.

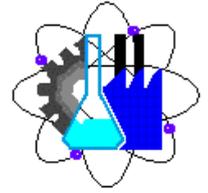
La mecánica de la fractura es la parte de la mecánica de sólidos que relaciona el tamaño y forma de una grieta y las fuerzas o cargas que provocan la fractura de un componente de forma y dimensiones definidas. Esta disciplina provee las bases y la metodología para el diseño y evolución de componentes agrietados a fin de determinar si la grieta es peligrosa y desarrollar estructuras más resistentes y tolerantes de defectos. También es de gran utilidad en aquellos componentes que ya han sido construidos o fabricados he incluso que ya fallaron, para proveer los criterios de aceptación o rechazo, frecuencia de inspección y para definir los límites de operación. Todo esto, se apoya en el cálculo de la distribución de esfuerzos, deformación, y desplazamientos alrededor de la grieta y en el establecimiento de los balances de energía que tienen lugar durante la extensión de una grieta.

Existen varias metodologías de análisis de fractura (González, 2004), dependiendo del comportamiento de los materiales, la extensión de la deformación plástica que precede a la fractura, y en función de la dependencia del tiempo. Desde el punto de vista del comportamiento de los materiales se obtienen dos tipos de fracturas:

**Fractura frágil.** Se presenta cuando la deformación de la mayor parte del cuerpo es elástica, de manera que después de la fractura, los fragmentos de la pieza pueden volver a juntarse sin que haya cambios significativos en la geometría.

**Fractura dúctil.** Ocurre después de una apreciable deformación plástica.

Con respecto a la extensión de la deformación plástica la fractura se clasifica (ver figura 1) como:



**Fractura lineal elástica.** Cuando la extensión de la zona plástica está confinada a una pequeña región frente a la punta de la grieta y la deformación del resto del cuerpo es elástica.

**Fractura elastoplástica.** La zona plástica se extiende en el total remanente del ancho de la pieza pero permaneciendo como una región relativamente estrecha alrededor del plano de la grieta.

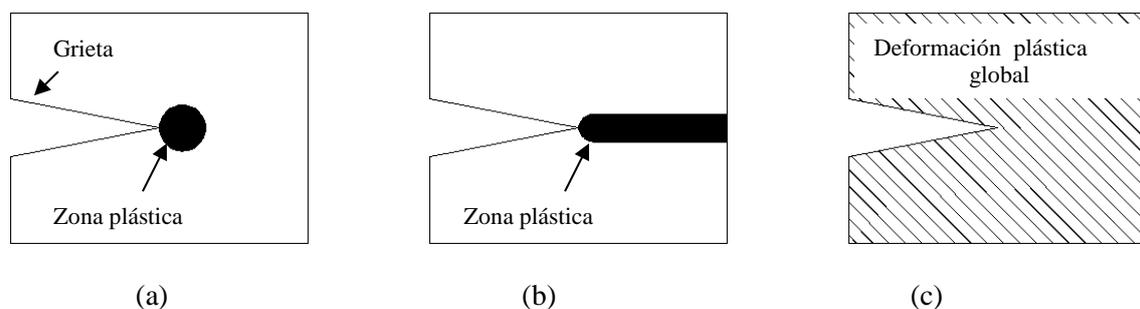
**Colapso plástico.** La fractura es precedida de deformación plástica generalizada.

Con base a su dependencia del tiempo la fractura se clasifica como:

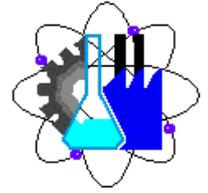
**Fractura estática.** Esta se presenta bajo una sola aplicación de carga de un sólido que contiene una grieta inicialmente estática que comienza a propagarse rápidamente en condiciones de inestabilidad. Aquí se incluyen la fractura frágil, la fractura dúctil, y el colapso plástico.

**Fractura lenta, retardada o estable.** Es la fractura que ocurre por la propagación lenta de una grieta a través del tiempo o por la acción de cargas repetitivas o fluctuantes. Es de carácter estable e incluye a la fatiga, la propagación de grietas por termofluencia y al agrietamiento por corrosión y esfuerzos.

La mecánica de fractura considera que el proceso de fractura inicia con una grieta que se propaga hasta la separación final o fragmentación de la pieza. La propagación de las grietas se pueden presentar de dos maneras, *estables e inestables*. Son estables cuando el crecimiento de la grieta puede detenerse al disminuir o desaparecer los esfuerzos, e inestables cuando se propaga de manera rápida, autoacelerada y es prácticamente imposible de detener.

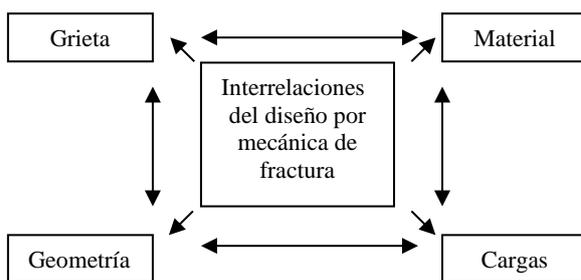


**Figura 1.** Clasificación de fractura con respecto a la extensión de la zona plástica; (a) lineal-elástica, (b) elastoplástica, (c) Colapso plástico. (González, 2004)



La mayoría de los componentes estructurales y mecánicos se diseñan y operan en condiciones que producen esfuerzos por debajo del límite elástico del material, la aproximación más común es la de *mecánica de fractura lineal-elástica* (MFLE). Aquí la mecánica de fractura toma en cuenta para el análisis el tamaño de la grieta, aumentando el número de interrelaciones que se pueden considerar en un diseño. En la figura 2 se muestran estas interrelaciones.

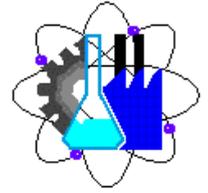
Se ha encontrado a través varios trabajos de investigación realizados por diferentes autores que considerar la presencia de grietas en un componente mecánico es muy importante, ya que la grieta potencialmente conduce a una falla, y cuando las condiciones de servicio propician la propagación de grietas, el periodo de tiempo en que se propaga una grieta hasta la falla, constituye la vida útil del componente.



**Figura 2.** Variables de análisis estructural introduciendo la mecánica de fractura. (González, 2004)

Conocer la carga de fractura para un tamaño de grieta específico y el tamaño de grieta máximo tolerable antes de la fractura, permite establecer las condiciones de carga y tamaños de grietas para operar en forma segura una estructura, determinando *la resistencia residual*. El análisis de la resistencia residual con base en la MFLE se fundamenta en la aplicación de un parámetro que caracteriza la fractura, llamado *factor de intensidad de esfuerzos* ( $K$ ), el cual en el siguiente tema se definirá detalladamente ya que en este trabajo de investigación es uno de los parámetros principales para determinar la vida útil de los alabes con propagación de grieta. Otros parámetros que se pueden utilizar para describir la propagación de la grieta son:

- a) *J- integral*, la cual se puede definir como una línea integral independiente de la trayectoria que mide la fuerza de la deformación y el esfuerzo singular cerca de una punta de grieta.



b) *Velocidad de liberación de energía* ( $G$ ), la cual representa la cantidad de trabajo asociado con una grieta abriéndose o cerrándose.

### **Propagación de la grieta**

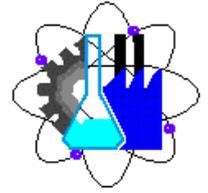
En esta parte se observará el procedimiento de estimación de vida después de que aparece la grieta, es decir se analizará la propagación de la grieta. Generalmente todas las pruebas del crecimiento de grieta se realizan sujetando al agrietamiento del espécimen a fluctuaciones de carga de amplitud constante con un rango de esfuerzo  $\Delta\sigma$  hasta el final de la fractura. La vida por fatiga se representa por el número de ciclos transcurridos hasta la fractura. La vida aprovechada se puede registrar hasta que aparece la grieta y se propaga hasta antes de que tome lugar el crecimiento rápido.

La magnitud de la amplitud de esfuerzos tiene una significativa influencia sobre la propagación de la grieta. Para amplitudes de esfuerzos grandes la vida de propagación de la grieta es pequeña, y se incrementa con una reducción en el nivel de carga. La vida de propagación de la grieta depende también del tamaño de grieta inicial, esta disminuye con la longitud de grieta inicial para una carga de amplitud de esfuerzo constante, existiendo un mayor aprovechamiento con una longitud de grieta muy pequeña.

De la aproximación de mecánica de fractura se puede identificar que el factor de intensidad de esfuerzos juega un papel importante en el comportamiento de la fractura estructural. La razón de crecimiento de la grieta esta dada por  $da/dN$ , en la cual la longitud de la grieta  $a$  crece con el número de ciclos de la carga aplicada  $N$ . La ley de Paris relaciona el crecimiento de la grieta con respecto al intervalo del factor de intensidad de esfuerzo de la siguiente manera

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_I)^m \quad (13)$$

donde  $\Delta K$  es el rango del factor de intensidad de esfuerzo,  $C$  y  $m$  son constantes empíricas. Este método requiere la hipótesis de que se mantienen las ecuaciones de deformación plana, suponiendo un material isótropico elástico.



En la tabla 1 se presentan valores de  $C$  y  $m$  para varias clases de materiales. Reacomodando los términos e integrando ambos lados de la ecuación (13), se tiene

$$\int_{a_0}^{a_f} da = \int_0^{N_f} C(\Delta K_I)^m dN \quad (14)$$

Aquí  $a_0$  es la longitud inicial de la grieta,  $a_f$  es la longitud final correspondiente a la falla y  $N_f$  es el número de ciclos estimado que se requiere para que se produzca una falla.

La siguiente ecuación determina la longitud de la propagación de la grieta por ciclo en términos del rango de esfuerzo y de la longitud de la grieta promedio.

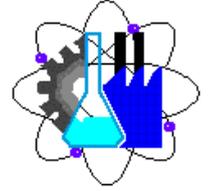
$$\frac{da}{dN} = 0.00063 (\Delta\sigma)^{2.25} (a_{avg})^{1.125} \text{ micrones/ciclo} \quad (15)$$

donde  $\Delta\sigma$  es en MPa y  $a_{avg}$  en metros.

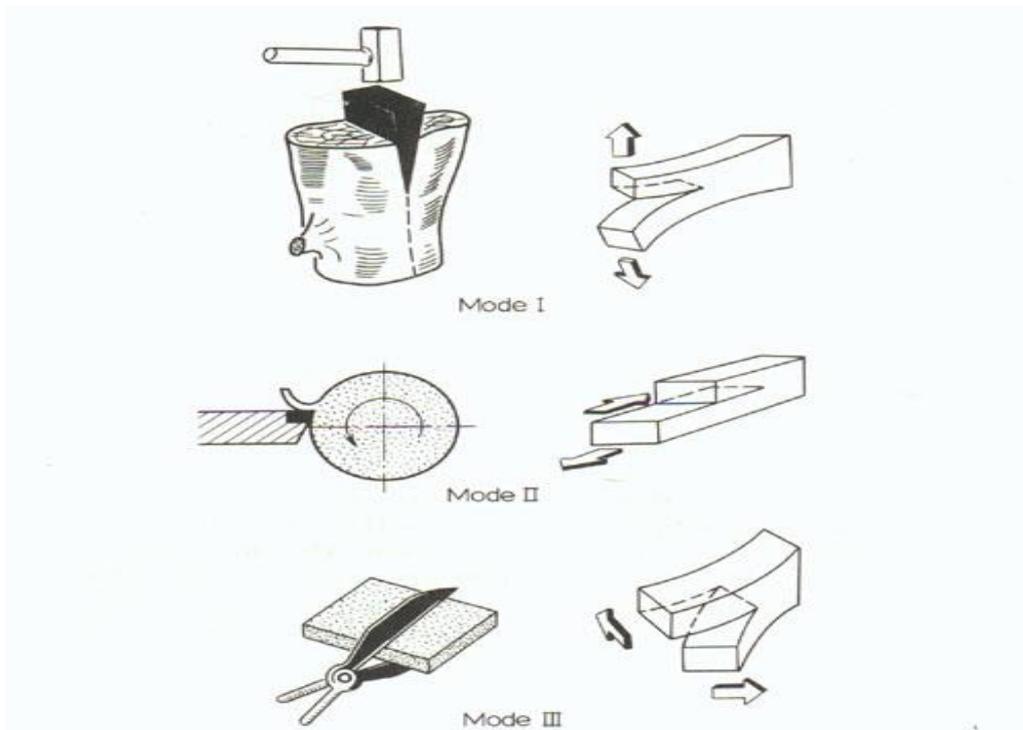
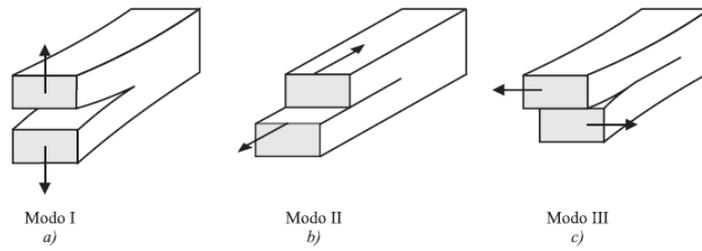
**Tabla 1.** Valores del factor  $C$  y exponente  $m$  en la ecuación (14). (Shigley, 2002)

MATERIAL	ECUACIÓN Y UNIDADES
Aceros Ferrito-perlíticos	$\frac{da}{dN} (m/ciclo) = 6.9(10^{-12})(\Delta K MPa\sqrt{m})^{3.0}$
	$\frac{da}{dN} (m/ciclo) = 3.6(10^{-10})(\Delta K kpsi\sqrt{in})^{3.0}$
Aceros martensíticos	$\frac{da}{dN} (m/ciclo) = 1.35(10^{-10})(\Delta K MPa\sqrt{m})^{2.25}$
	$\frac{da}{dN} (in/ciclo) = 6.6(10^{-9})(\Delta K kpsi\sqrt{in})^{2.25}$
Aceros Inoxidables austeníticos	$\frac{da}{dN} (in/ciclo) = 5.6(10^{-12})(\Delta K MPa\sqrt{m})^{3.25}$
	$\frac{da}{dN} (in/ciclo) = 3.0(10^{-10})(\Delta K kpsi\sqrt{in})^{3.25}$

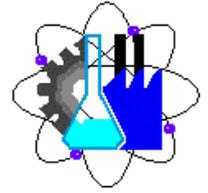
#### 4.4 Factor de intensidad de esfuerzo.



Como se menciono antes la mecánica de fractura se basa en el cálculo del campo de esfuerzos y deformaciones alrededor de una grieta, los cuales provocan el desplazamiento relativo de las superficies de fractura en un cuerpo. Se muestra en la figura 3, los tres modos básicos de desplazamiento de las superficies de una grieta que pueden ocurrir en un cuerpo al aplicar carga. El modo I es la abertura de la grieta en dirección perpendicular al plano de fractura, el modo II se refiere al desplazamiento de las superficies en sentidos opuestos pero en la dirección de avance de la grieta, y el modo III es el desplazamiento fuera del plano en dirección perpendicular a la dirección del avance. El caso general es la combinación de los tres modos, el cual resulta muy complicado analizar.



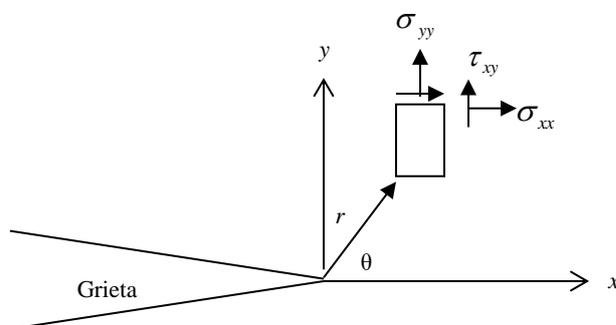
**Figura 3.** Modos de desplazamientos.



Para realizar el análisis de la fractura, el primer problema es el cálculo del campo de esfuerzos alrededor de una grieta. Sea una grieta en modo I, en una placa de espesor uniforme, sometida a un esfuerzo de tensión también uniforme. En un punto cualquiera situado en una posición  $(r, \theta)$  de la punta de grieta hay un estado de esfuerzos particular  $\sigma_{ij}$  como se muestra en la figura 4. Si la placa es muy delgada, no habrá suficiente material en la dirección transversal ( $z$ ) para transmitir fuerzas y por lo tanto el esfuerzo en esta dirección es cero. Como los únicos esfuerzos mayores a cero son los que están en el plano  $xy$ , se tiene la condición de esfuerzo plano. Por el contrario, si la placa es muy gruesa, el espesor resiste la contracción en la dirección  $z$  y se genera un estado de deformación plana con componentes de deformación solo en las direcciones  $x$  y  $y$ . Las componentes del esfuerzo plano en un punto son:  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\tau_{xy}$ .

El factor de intensidad de esfuerzos es el parámetro más significativo de mecánica de fractura lineal elástica ya que define la magnitud de los esfuerzos alrededor de la grieta. Su forma más general, es expresado matemáticamente como:

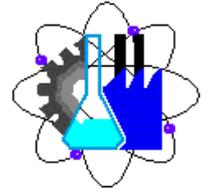
$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (16)$$



**Figura 4.** Sistema de coordenadas alrededor de la grieta.

donde  $Y$  es un parámetro que involucra la geometría de la grieta y del componente,  $a$  es el tamaño de la grieta y  $\sigma$  una función que representa la magnitud del esfuerzo en el componente. Cuando se alcanza el valor crítico del factor de intensidad de esfuerzo, conocido como *tenacidad a la fractura* y denotado por  $K_c$ , ocurre la fractura. La tenacidad a la fractura constituye una propiedad del material medible por pruebas de laboratorio. El criterio de fractura de la MFLE establece que ocurrirá fractura cuando  $K > K_c$ .

En la tabla 2 se tiene la solución de los modos I, II, III, para obtener los esfuerzos alrededor de la grieta en una placa infinita. En la tabla 3 se muestra como determinar los factores de intensidad de esfuerzos para geometrías simples. Cabe mencionar que solo se presentan para tres casos sin



embargo en los libros se tienen varias geometrías. Las expresiones para el factor de intensidad de esfuerzos en realidad pueden llegar a ser bastante complicadas, en particular para cuerpos de dimensiones finitas con geometrías complejas. Por causa de la complejidad de calcular el  $K$ , se tienen varios métodos los cuales se clasifican en:

- Solución analítica.
- Solución por métodos numéricos (elemento finito, integral límite, etc.).
- Métodos experimentales (complianza, fotoelasticidad, extensometría, etc.).
- Métodos indirectos (propagación de grietas por fatiga, fractográfico, etc.).

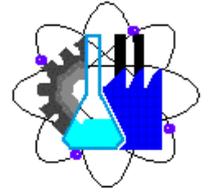
En este análisis se utilizará el método numérico, para determinar el factor de intensidad de esfuerzos en el alabe y grupo. Por lo tanto se definirá detalladamente en el siguiente tema el proceso para determinarlo en el programa de elemento finito ANSYS

**Tabla 2.** Solución para los modos I, II, III en una placa infinita.

Modo I	Modo II	Modo III
$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$\sigma_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \left[2 + \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2}\right]$	$\tau_{xz} = \frac{-K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$
$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2}$	$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}$
$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$	$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left[2 - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right]$	<i>Las demás componentes son cero</i>
$\sigma_{zz} = 0$ (esfuerzo plano)	$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$	
$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (deformación plana)	$K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}$	$K_{III} = \tau\sqrt{\pi a}$
$\tau_{xz}, \tau_{yz} = 0$		

**Tabla 3.** Factores de intensidad de esfuerzos para geometrías simples.

Geometría	$K$
	<p>Placa con grieta central:</p> $K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \left(\sec\frac{\pi a}{W}\right)^{1/2}$ $K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}$



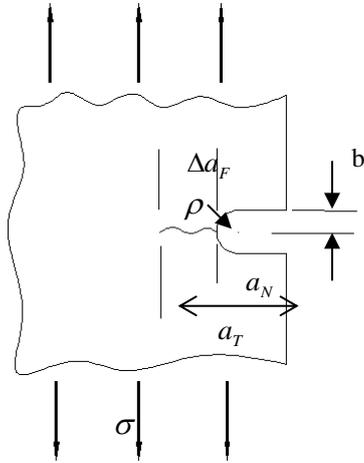
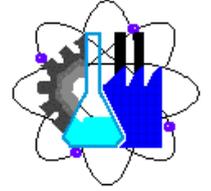
	<p>Placa con grieta lateral:</p> $K_I = Y\sigma\sqrt{a}$ $Y = 1.99 - 0.4a' + 18.7a'^2 - 34.8a'^3 + 53.85a'^4$ $a' = (a/W)$
	<p>Compacta de tensión (CT):</p> $K_I = \frac{P}{B\sqrt{W}} \frac{[0.886 + 4.64a' - 13.32a'^2 + 14.72a'^3 - 5.6a'^4]}{(1-a')^{3/2}}$ $a' = (a/W); B = \text{espesor}$

Para el crecimiento de grieta en una fisura semielíptica en el límite de la placa como se muestra en la figura 5. El factor de intensidad de esfuerzos se define para este caso como:

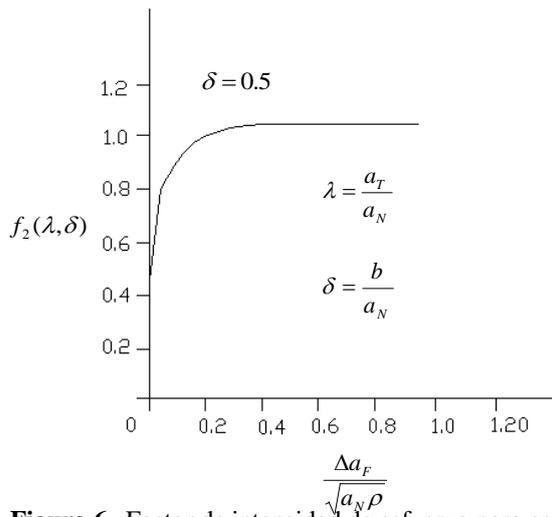
$$\Delta K = 1.12\Delta\sigma\sqrt{\pi a_T} k\left(\frac{a}{b}\right) f_2(\lambda, \delta) \quad (17)$$

donde  $f_2(\lambda, \delta)$  esta dado en la figura 6 y  $k\left(\frac{a}{b}\right)$  en la tabla 4.

La ecuación (17) es muy importante en el modelamiento de grietas presentadas en la raíz del alabe. La fisura del alabe de la raíz en un alabe se puede modelar como semielíptica y el factor de intensidad de esfuerzo determinarse para el propósito de cálculos de la mecánica de la fractura.



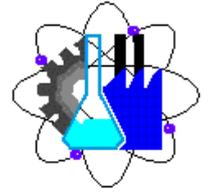
**Figura 5.** Crecimiento de grieta de una fisura semielíptica.



**Figura 6.** Factor de intensidad de esfuerzo para crecimientos de grieta de fisuras semielípticas en el límite.

**Tabla 4.**  $k\left(\frac{a}{b}\right)$  en ecuación (17). (Rao, 2000)

$\frac{a}{b}$	$k\left(\frac{a}{b}\right)$
0.1	1.03
0.2	1.07
0.3	1.15
0.4	1.22
0.5	1.35
0.6	1.5
0.7	1.69



0.8	1.91
0.9	2.2
1	2.55

McClintock predijo la existencia de un valor umbral del factor de intensidad de esfuerzo a través de un análisis elástico plástico. Schmidt y Paris en 1973 confirmaron estos resultados e indicaron que podría tener un significativo efecto sobre la propagación de grieta a la fatiga el factor de intensidad de esfuerzos umbral ( $\Delta K_{th}$ ). Para una relación de esfuerzo mayor que 0.1, para aceros martensíticos, bainíticos, austeníticos y ferrita-perlita se tiene que

$$\Delta K_{th} = 7(1 - 0.85R) MPa\sqrt{m} \quad R > 0.1 \quad (18)$$

donde  $R = \frac{K_{min}}{K_{max}} = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$  o  $R = \frac{(\sigma_m - \sigma_a)}{(\sigma_m + \sigma_a)}$   $\sigma_a$  = esfuerzo alternativo.

Para  $R$  menos que 0.1 el factor de intensidad de esfuerzo umbral para la propagación de la grieta es constante, dada por

$$\Delta K_{th} = 6 MPa\sqrt{m} \quad R < 0.1 \quad (19)$$

La ecuación general de  $\Delta K$  esta dada

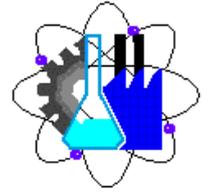
$$\Delta K = \Delta\sigma(\pi a)^{1/2} \left( \frac{K_I}{K_0} \right) \quad (20)$$

La relación  $\frac{K_I}{K_0}$  corrige la geometría del problema.

#### 4.5 Análisis de fractura por elemento finito.

El programa de elemento finito ANSYS se utilizará para determinar el factor de intensidad de esfuerzos a diferentes tamaños de grietas del grupo de alabes. Posteriormente utilizar los valores de  $K$  para estimar la propagación de la grieta. Para realizar el cálculo por ANSYS se deben llevar a cabo dos principales aspectos de este procedimiento (ANSYS, 2006):

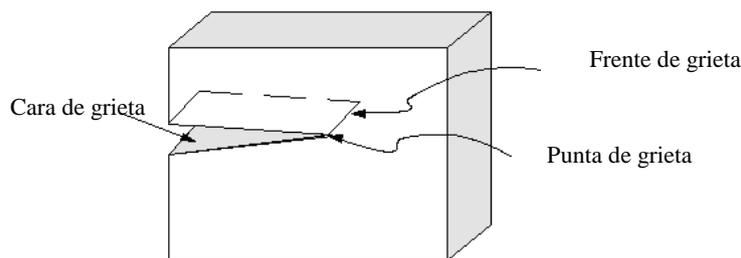
- 1.- Modelado de la región de la grieta.
- 2.- Cálculos de los parámetros de la fractura.



### Modelado de la grieta.

La región más importante en un modelo de fractura es la región alrededor del límite de la grieta.

Se puede referir al límite de la grieta como una *punta de grieta* en un modelo de 2D y *frente de grieta* en un modelo de 3-D. Esto se ilustra en la figura 7.

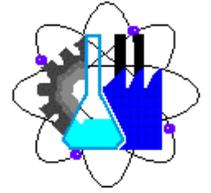


**Figura 7.** Punta de grieta y frente de grieta.

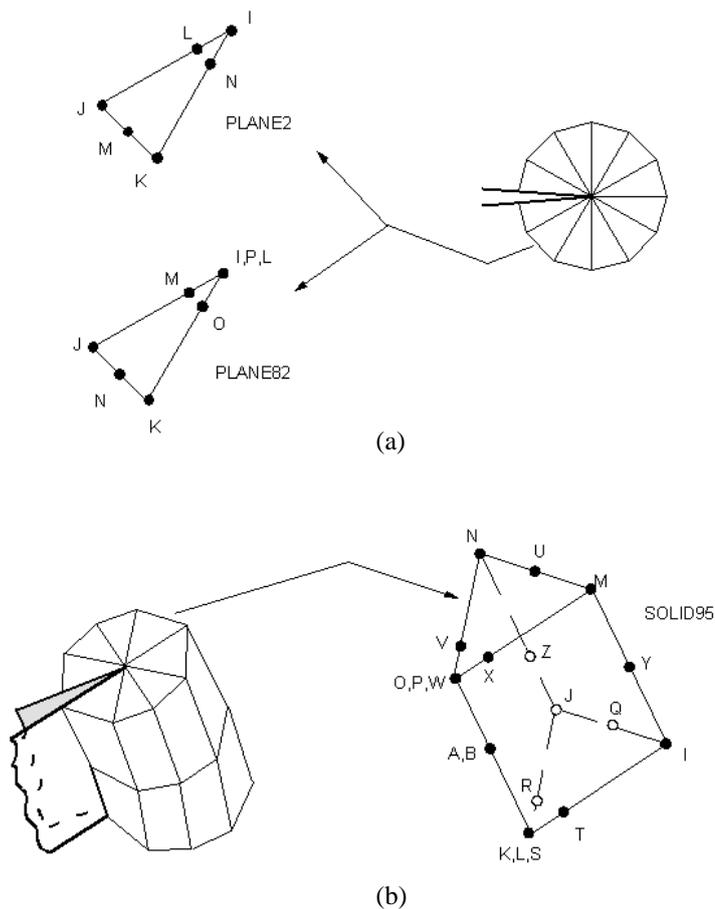
En problemas lineales elásticos, sea demostrado que los desplazamientos cerca de la punta de grieta (o frente de grieta) varía  $\sqrt{r}$ , donde  $r$  es la distancia de la punta de grieta. El esfuerzo y la deformación son singulares en la punta de grieta, variando  $1/\sqrt{r}$ . Para adquirir la singularidad en la deformación, las caras de las grietas deben ser coincidentes, y los elementos alrededor de la punta de grieta (o frente de grieta) deben ser cuadráticos, con los nodos medios colocados a un cuarto de los puntos. Tales elementos son llamados *elementos singulares*. La figura 8 muestra ejemplos de elementos singulares para modelos 2-D y 3-D.

El primer elemento PLANE82, es sólido triangular compuesto de 6 nodos, el segundo es elemento cuadrado y se compone de 8 nodos. La primera fila de elementos alrededor de la punta de grieta se ilustra en la figura 6. En ANSYS con el comando KSCON se puede asignar el tamaño de los elementos de división alrededor del punto de grieta. También este comando permite controlar el radio de la primera fila de elementos en la dirección circunferencial. También se deben cumplir los siguientes puntos para el modelo

- Tomar la ventaja de simetría cuando sea posible.



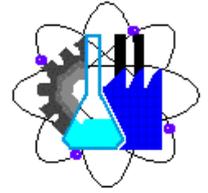
- Para obtener resultados razonables, la primera hilera de elementos alrededor de la punta de la grieta debe tener un radio aproximado  $a/8$  o menos, donde  $a$  es la longitud de la grieta en la dirección circunferencial, más o menos un elemento cada  $30^\circ$  o  $40^\circ$ .
- La punta de los elementos no debe estar distorsionada, y debe de tomar la forma de un triángulo isósceles.



(a) 2-D models and (b) 3-D models

**Figura 8.** Ejemplos de elementos singulares; (a) modelos 2D, (b) modelos 3D

- Los tipos elementos recomendados para el modelo de fractura 2D es PLANE2 y



El tipo de elemento recomendado para modelos 3D es SOLID95, es un elemento ladrillo con 20 nodos. La figura 8 muestra estos elementos, la primera fila de elementos alrededor del frente de la grieta deben ser elementos singulares. Se observa que el elemento es formado en cuña, con la cara KLPO colapsada en la línea KO. La generación del modelo en 3D es considerado más complejo que el modelo 2D. El comando KSCON no esta disponible, y se debe asegurar que el frente de la grieta esta a lo largo del límite KO de los elementos.

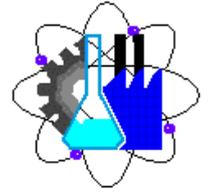
Otras medidas para el mallado en modelos 3D son las siguientes:

- Las recomendaciones del tamaño del elemento son las mismas que para los modelos 2D. En adición la relación de aspecto no deben exceder aproximadamente 4 a 1 en todas direcciones.
- Para frentes de grietas curvados, el tamaño del elemento a lo largo del frente de la grieta dependerá de la cantidad de curvatura local. Como una guía burda, se puede tener un elemento cada 15° a 30° a lo largo de un frente de grieta circular.
- Todos los límites de los elementos deben ser rectos, incluyendo el límite sobre el frente de grieta.
- 

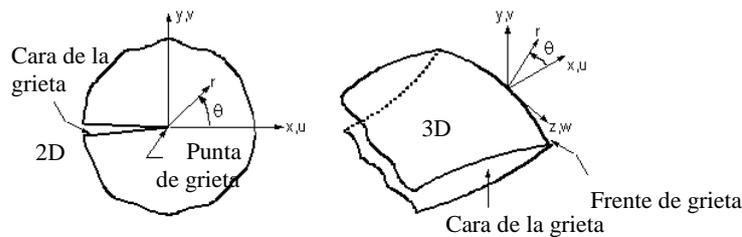
#### **Cálculo de los parámetros de fractura.**

Una vez realizado el análisis estático, se usa POST1, que es el procesador general, para calcular los parámetros de fractura. Como ya se menciona el programa ANSYS puede determinar tres parámetros diferentes. Sin embargo a continuación se describirá solamente el proceso para el factor de intensidad de esfuerzos (ANSYS, 2006).

Con el comando KCALC en POST1 (Main Menu>General Postproc>Nodal Calcs>Stress Int Factr) calcula los factores de intensidad de esfuerzos en modos mezclados  $K_I$ ,  $K_{II}$ , y  $K_{III}$ . Este comando esta limitado a problemas elásticos lineales con homogeneidad, material isotrópico cerca de la región de la grieta. Para usar apropiadamente KCALC, se siguen los siguientes pasos en POST1.

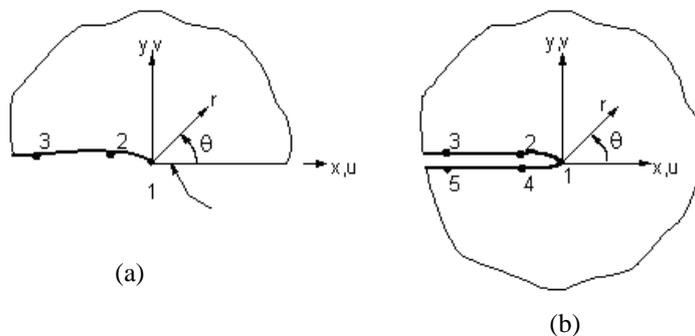


1.- Definir un sistema de coordenadas para la punta de grieta o frente de grieta, con  $x$  paralelo a la cara de la grieta (perpendicular al frente de la grieta en modelos 3D) y  $y$  perpendicular a la cara de la grieta, como se muestra en la siguiente figura.



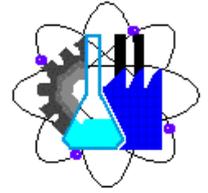
**Figura 9.** Sistema de coordenadas en el modelo de grieta.

2.- Definir una trayectoria a lo largo de la cara de la grieta. El primer nodo sobre la trayectoria debe ser el nodo de la punta de la grieta. Para el modelo de media grieta, dos nodos adicionales se requieren, ambos a lo largo de la cara de la grieta. Para un modelo de grieta completa, donde ambas caras de la grieta se incluyen, se requieren cuatro nodos adicionales: dos a lo largo de una cara de la grieta y dos en la otra cara. Esto se ilustra en la figura 10 para casos de modelos 2D.



**Figure 10.** Definiciones de trayectorias típicas; (a) modelo de media grieta, (b) modelo de grieta completa.

3.- Calcular  $K_I$ ,  $K_{II}$ , y  $K_{III}$ . El campo KPLAN en el comando KCALC especifica si el modelo es deformación plana o esfuerzo plano. Excepto para el análisis de placas delgadas, el comportamiento de esfuerzo asintótico o cerca de la punta de grieta es usualmente a través de deformación plana. En el campo KCSYM se especifica si el modelo es de media grieta con condiciones de frontera simétricas, un modelo de media grieta con condiciones de frontera antisimétricas, o un modelo de grieta completa.

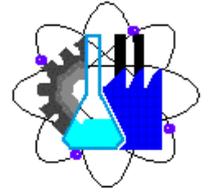


## REQUERIMIENTOS DE TAMAÑO

Existen exigencias rigurosas en cuanto al tamaño de espécimen. Estas son un resultado de la condición que debe existir para deformación plana en la punta de la grieta. Se ha mostrado que el espesor tiene que ser grande con respecto al tamaño de la zona plástica, por otra parte el esfuerzo plano se podría desarrollar. Hay siempre una región de esfuerzo plano en la superficie de espécimen, y para la deformación plana predominante, la región de esfuerzo plano en la superficie tiene que ser relativamente pequeño. Esto significa que el espesor tiene que ser grande.

Es evidente que el grosor debe ser un múltiplo del tamaño de la zona plástica. Ya que éste es proporcional a  $K_{IC}^2 / \sigma_{ys}^2$ , el requerimiento indica que el espesor B debe ser  $B \geq \alpha K_{IC}^2 / \sigma_{ys}^2$ . De acuerdo a la figura 7.5 los valores de  $K_{IC}$  consistentes se obtienen si  $\alpha \geq 2.5$ , valor adoptado en el requerimiento ASTM. Para valores más pequeños de  $\alpha$  las regiones de esfuerzo plano en la superficie del espécimen son relativamente grandes y influyen demasiado, resultando una dureza aparente más alta que el  $K_{IC}$  verdadero por deformación plana.

Un requisito similar se tiene para el tamaño de la grieta: la zona plástica debe ser pequeña comparada a la longitud de la grieta. Esto fija una condición de limitación al tamaño relativo de la grieta. También, hay otro problema importante que fija una condición de limitación al tamaño absoluto de la grieta. De la relación entre el esfuerzo de fractura y el tamaño de la grieta,  $\sigma_c = K_{IC} / \sqrt{\pi a}$  esto sigue que  $\sigma_c$  llega a ser infinito para valores pequeños de  $a$ . Esto no ocurre en realidad, ya que  $\sigma_c = \sigma_u$  para  $a = 0$ , como se muestra en la figura 7.6. Si el tamaño de la grieta es más pequeño que  $a_{min}$  en la figura 7.6, la fractura podría ocurrir en un esfuerzo más bajo que lo predicho por  $K_{IC}$ . La fractura en A se produciría en  $K_Q = \sigma_a \sqrt{\pi a}$  como el  $K_{IC}$ , mientras que el resultado debe haber sido en  $K_{IC} = \sigma_b \sqrt{\pi a}$  si la fractura ocurriera en B (figura 7.6). Esto significa que el  $K_{IC}$  aparente del espécimen es más bajo que el  $K_{IC}$  verdadero: el espécimen mostraría un resultado erróneo. La figura 7.7 demuestra que el tamaño de la grieta debe ser  $a \geq 2.5 K_{IC}^2 / \sigma_{ys}^2$  para asegurar valores constantes de  $K_{IC}$ . El  $K_{IC}$  aparente para el dato de pequeña grieta en la figura 7.7 es más alto que el  $K_{IC}$  real, en contradicción a la predicción de la figura 7.6. La discrepancia es debido al hecho de que el tamaño relativo fue pequeño también (con respecto a la zona plástica), el tamaño absoluto de la grieta podría todavía haber sido suficiente.



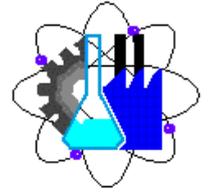
Aparentemente ambos  $B$  y  $a$  deben ser más grande que  $2.5K_{IC}^2 / \sigma_{ys}^2$ . Si el tamaño de la zona plástica de deformación plana se toma en  $r_p = (1/3\pi)K_{IC}^2 / \sigma_{ys}^2$ , sigue que  $a$  y  $B$  deben ser por lo menos 25 veces la anchura de la zona plástica. Las otras dimensiones del espécimen se adaptan apropiadamente,  $W = 2a$  y también  $2B = W$  para los especímenes estándares. La longitud del espécimen la curvado es  $4W$ , y la longitud del espécimen compacto de la tensión es  $1.2W$ .

Los requerimientos implican que el valor anticipado de  $K_{IC}$  se debe estimar antes de la prueba, para obtener las dimensiones requeridas del espécimen. La prueba entonces se realiza, y el valor de  $K$  en la fractura se determina por las ecuaciones (7.1) - (7.4). Este valor de  $K$  se denota como  $K_Q$ , la tenacidad a la fractura del candidato. Entonces hay que checar si  $a$  y  $B$  son más grandes que  $2.5K_{IC}^2 / \sigma_{ys}^2$ . Si es así,  $K_Q$  es el  $K_{IC}$  que se determinará, proporcionado también que los otros requisitos estén satisfechos. Si no, el resultado es inválido.

## **EFFECTO DEL ESPESOR**

El efecto del espesor se relaciona a la transición gradual desde deformación plana total hasta esfuerzo plano total. Cuando la región de superficie donde el esfuerzo plano predomina llega ser relativamente pequeño en paneles gruesos, su influencia puede ser despreciable y el comportamiento llega ser independiente del espesor. En paneles delgados la región de esfuerzo plano no es pequeña en comparación a la región de deformación plana, y el esfuerzo nominal en el incremento de la fractura con la relación de incremento entre el tamaño de las regiones del esfuerzo plano y deformación plana. La transición en el modo de fractura de tensión plana a  $45^\circ$  de inclinación esta relacionada a esta misma relación.

Debe ser puntualizado que el efecto de la resistencia de fluencia sobre la tenacidad es mucho más grande en la región transicional que en esfuerzo plano o deformación plana. Esto es trazado en la figura 8.12. Si no hay influencia de la resistencia de fluencia sobre el máximo (esfuerzo plano)  $K_{Ic_{max}}$ , y sobre  $K_{Ic}$  todavía habría un efecto sobre comportamiento transitorio. El comportamiento depende sobre la relación de la cantidad de material en esfuerzo plano a la cantidad de material en deformación plana. Alternadamente, esta relación depende sobre el



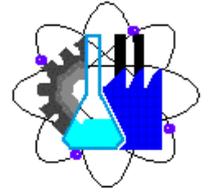
tamaño de la zona plástica y por lo tanto sobre la resistencia de fluencia. Una más alta resistencia de fluencia produce una zona plástica más pequeña: hay más material en deformación plana y la tenacidad es baja (figura 8.12a). Realmente  $K_{Ic_{max}}$  y  $K_{Ic}$  también dependen sobre el esfuerzo de fluencia (figura 8.12b), la cual causa la influencia de la resistencia de fluencia sobre el comportamiento transitorio, a ser incluso mayor. Aunque hay un apropiado entendimiento cualitativo del efecto del espesor, un modelo cuantitativo aceptado no existe todavía. Pocos modelos han sido propuestos. Bluhm [29] propuso un modelo cuantitativo basado en dos suposiciones:

a.- El tamaño del borde cortante en fractura es independiente del espesor, es decir la transición de deformación plana en el interior del esfuerzo plano en la superficie siempre ocurre en el mismo volumen de material. Esto implica que el tamaño del borde cortante es igual a la mitad del espesor máximo en el cual se convierte en esfuerzo plano total.

b.- La fractura plana es un fenómeno superficial, mientras la formación del borde cortante es volumétrico. La energía en fractura plana se supone ser proporcional al tamaño de las partes fracturadas ( $B - B_0$ ). La energía de la fractura del borde cortante se supone proporcional a  $(B/2)^2$  hasta  $B_0$ , e igual a  $(B_0/2)^2$  arriba de  $B_0$ , donde  $B_0$  es el espesor máximo en el cual el esfuerzo plano se puede desarrollar completamente.

Broek and Vlioger [24] propusieron otro modelo, el cual es una extensión de uno establecido por Isherwood y Williams [30] para esfuerzo plano. Predicen que  $K_{Ic}$  gradualmente se aproxima a  $K_{Ic}$  para grandes valores de  $B$ . Para el caso donde el espesor apenas cumple la condición de ASTM de  $B = 2.5 \cdot K_{Ic} / \sigma_{ys}^2$  el  $K_{Ic}$  medido no es todavía igual al  $K_{Ic}$  real. La diferencia depende sobre las propiedades del material. El esfuerzo plano puede desarrollarse completamente si el tamaño de la zona plástica esta en el orden del espesor de la placa. Esto significa que  $B_0$  debe ser igual al tamaño de la zona plástica en deformación plana. El último es aproximadamente igual a dos veces la corrección de la zona plástica. Por lo tanto

$$B_0 \cong \frac{K_{Ic}^2}{3\pi\sigma_{ys}^2} \quad (1)$$



Si el espesor  $B$  es suficiente para satisfacer la condición ASTM, sigue de la ecuación (1) que  $B_0/B = 0.425$ . Para un material con  $\varepsilon_f = 0.3$ ,  $\sigma_{ys} = 50 \text{ kg/mm}^2$  y  $E = 7000 \text{ kg/mm}^2$  se

encuentra de la siguiente ecuación  $\frac{K_{Ic}}{K_{Ic}} = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_f E B_0}{24\sigma_{ys} B}}$  que  $\frac{K_{Ic}}{K_{Ic}} = 1.038$ . La tenacidad de

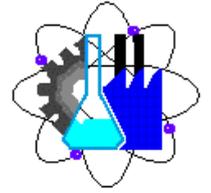
fractura que se debe medir en la prueba de deformación plana válida debe aún estar sobre el cuatro por ciento arriba del  $K_{Ic}$  verdadero. Para materiales con más altos  $\sigma_{ys}$  la diferencia es pequeña.

Un acero con  $\varepsilon_f = 0.1$ ,  $\sigma_{ys} = 200 \text{ kg/mm}^2$  y  $E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ , presentará un valor de tenacidad solamente un por ciento arriba de su  $K_{Ic}$  verdadero.

Anderson [31] realizó un análisis de datos disponibles sobre el efecto del espesor. Él decidió que una disminución lineal de  $K_{Ic}$  con el espesor es una razonable de los datos (ver figura 8.14). Con el conocimiento de los dos valores de tenacidad “básicos”,  $K_{Ic_{max}}$  y  $K_{Ic}$ , es posible determinar el diagrama de tenacidad de la figura 8.14. El punto A se puede derivar de la condición  $B_0 = K_{Ic}^2 / 3\pi\sigma_{ys}^2$ , y el punto C de la condición de ASTM para deformación plana  $B_I = 2.5K_{Ic}^2 / \sigma_{ys}^2$ .

Otra explicación para el efecto del espesor se presenta en los trabajos de Sih y Hartranft [32], quienes han puntualizado que la liberación de la energía por unidad de longitud del frente de la grieta es una función del espesor y no una constante. La energía liberada por unidad de extensión de grieta en una placa de espesor  $B$  está dada por  $\overline{GB}$ , donde  $\overline{G}$  se denota como la razón promedio de energía liberada. La cantidad  $\overline{G}$  se incrementa con el espesor.

En vez de usar  $\overline{G}$  es posible usar una intensidad de esfuerzo promedio  $\overline{K}$ . De acuerdo a Sih y Hartranft la intensidad de esfuerzo varía a lo largo del frente de la grieta. Con el mismo esfuerzo, la intensidad de esfuerzo es más bajo en esfuerzo plano que en deformación plana. Esto implica que la intensidad de esfuerzo promedio  $\overline{K}$  está más bajo si una parte más grande del espesor está debajo del esfuerzo plano. Así, que el factor de intensidad promedio  $\overline{K}$  en una condición de modo mezclado es más bajo que el factor de intensidad de esfuerzo “aparente” definido por  $K_a = \sigma\sqrt{\pi a}$ . En caso de deformación plana  $\overline{K} = K_a$ . Se puede suponer que la falla podría ocurrir si la intensidad de esfuerzo promedio es igual a  $K_{Ic}$ . Esto significa que la tenacidad de



fractura “real” se supone no depender sobre el espesor, y que esta tenacidad “verdadera” es  $K_{Ic}$ . La dependencia aparente de la tenacidad sobre el espesor es entonces debido al hecho que  $K_{Ic}$  se basa en  $K = \sigma\sqrt{\pi a}$ , y de acuerdo a Sih y Hartranft, esta es una intensidad de esfuerzo aparente y no la intensidad de esfuerzo verdadero. El criterio de fractura entonces es:  $\bar{K} = K_{Ic}$ . La tenacidad aparente  $K_{Ic}$  se obtiene de:

$$\frac{K_{Ic}}{K_{Ic}} = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\bar{K}} \quad (8.24)$$

Puesto que  $\bar{K}$  es una función del espesor, la ecuación (8.24) muestra como  $K_{Ic}$  varia con el espesor. Los valores numéricos para  $\bar{K}$  se pueden derivar de las graficas presentadas por Sih y Hartranft.

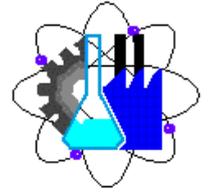
Una comparación de datos de prueba con varios modelos de espesores es hecha en las figuras 8.15 y 8.16. Los datos de prueba no muestran concordancia con los modelos si las curvas son usadas basadas sobre valores apropiados de  $\sigma_{ys}$  y  $\varepsilon_f$ . Sin embargo a continuación se presenta

$$\frac{K_{Ic}}{K_{Ic}} = \sqrt{1 + q \frac{B_0}{B}} \quad (25)$$

Esta ecuación generaliza la ecuación de Broek y Vlieger y la propuesta por Sih y Hartranft para un mejor ajuste obtenido por adaptación del factor  $q$ . Este factor depende sobre que se supone por el tamaño de la zona plástica y sobre el criterio para el desarrollo de esfuerzo plano. Ya que estas suposiciones son más o menos arbitrarias no hay objeción en adaptarlas. Estas han sido hechas en las figuras 8.15 y 8.16a.

La figura 8.16b muestra una comparación de los mismos datos de prueba con el modelo de Sih y Hartranft.

$\bar{K}$  no es solamente una función de  $B$ , pero también del tamaño de la grieta  $a$ . Por lo tanto la cantidad  $B/a$  es registrada a lo largo de la abscisa. Además, depende sobre el parámetro  $p$ , el cual puede tomar valores como muestra. Cuando considerando la información para un espesor (no



varia mucho en  $K_{Ic}$ ) se puede concluir que cualquier dependencia de  $\bar{K}$  sobre el tamaño de la grieta, como se predice por el modelo, es también fuerte, o también la suposición, que la tenacidad “verdadera” del material no depende sobre el estado de esfuerzo, es incorrecto.

## Mechanisms of fatigue-crack propagation in ductile and brittle solids

R.O. RITCHIE

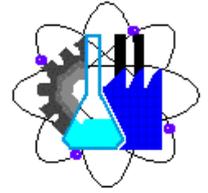
*Materials Sciences Division, Lawrence Berkeley National Laboratory, and Department of Materials Science and Mineral Engineering, University of California, Berkeley, CA 94720-1760, U.S.A.*

Received 21 January 1998; accepted in revised form 22 May 1998

### Introducción

La fatiga cíclica involucra el daño microestructural y falla del material bajo cargas variando cíclicamente. Los materiales estructurales, sin embargo, son raramente diseñados con composiciones y microestructuras optimizadas por resistencia a la fatiga. Las aleaciones metálicas son generalmente diseñadas para resistencia, intermetálicos para ductibilidad, y cerámicos para tenacidad; aún, si algunos de estos materiales en el servicio de ingeniería, su integridad estructural es a menudo limitada por su resistencia mecánica bajo cargas cíclicas. Generalmente es considerado que sobre el 80 por ciento de todas las fallas en servicio pueden ser descritas por fatiga mecánica, en asociación con plasticidad cíclica, deslizamiento o contacto físico (fatiga por corrosión), o temperaturas elevadas (fatiga por creep). De acuerdo con un gran volumen de literatura que ha sido recopilada particularmente sobre los pasados veinticinco años, desarrollando con la mecánica y mecanismos de falla por fatiga mecánica; sin embargo, la mayoría de esta gran cantidad de investigaciones pertenece solamente a materiales metálicos

A pesar de esta preponderancia de información sobre fatiga de metal, ha habido un incremento interesante en el uso de alta resistencia, materiales quebradizos, semejantes como cerámicos, intermetálicos y sus respectivos compuestos, para aplicaciones estructurales donde la carga cíclica es crítica [Harrison y Winstone, 1996; Kochendörfer, 1996]. Esto ha sido particularmente enfocado en aplicaciones con temperaturas elevadas, para fuselajes y especialmente componentes de máquinas (Kochendörfer, 1996), pero en el caso de cerámicos a temperaturas inferiores para mecanismos de implantes biomédicos (Ritchie, 1996). Algunos de estos materiales son cerámicos, titanios que son aplicados en parte de motores automotrices y en alabes de turbinas de gas.



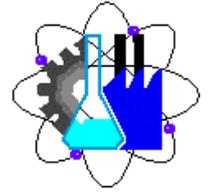
Mientras que estos materiales ofrecen una mejor resistencia a altas temperaturas comparados a aleaciones metálicas convencionales, ellos sufren en general de una pronunciada falta de tolerancia de daño en la forma de una extrema sensibilidad de los defectos preexistentes. Además, esto ha llegado a ser aparente para metales similares, sólidos quebradizos semejantes pueden adicionalmente mostrando una marcada susceptibilidad para falla prematura bajo cargas de fatiga cíclicas (Dauskardt y otros, 1987).

Los mecanismos asociados con la propagación de grieta a la fatiga en materiales quebradizos, tales como monolíticos y compuestos cerámicos e intermetálicos, son absolutamente distintos de estos comúnmente encontrados en fatiga de metal; por otra parte, su comportamiento de la razón del crecimiento de la grieta ( $da/dN$ ) muestra una marcada alta sensibilidad para la intensidad de esfuerzo aplicado ( $K$ ) que se observa en la mayoría de los metales (figura 1) (Ritchie y Dauskardt, 1991). Sin embargo considerando el crecimiento de la grieta como una competición mutua entre los mecanismos intrínsecos microestructurales dañados, los cuáles promueven la extensión de la grieta delante de la punta, y los mecanismos extrínsecos de protección de la punta de grieta, que actúan primeramente detrás de la punta para retardar el crecimiento de grieta (Ritchie, 1988) una concordancia específica del comportamiento entre la fatiga de materiales dúctiles y frágiles se puede encontrar, diferenciando solamente en la importancia relativa de los mecanismos intrínsecos y extrínsecos.

El objetivo de este artículo es describir esta concordancia comparando y contratando los mecanismos salientes que afectan la propagación de las grietas de fatiga en materiales dúctiles y frágiles. Se inició con una breve revisión de la distinción entre los mecanismos intrínsecos y extrínsecos los cuales pueden afectar el crecimiento crítico y subcrítico de grietas.

De la perspectiva de encontrar cualquier concordancia en mecanismos del crecimiento de la grieta a fatiga en diversos materiales, esto es la naturaleza específica y, más significativa, la importancia relativa de los mecanismos intrínsecos (daños) contra los mecanismos extrínsecos (protegen) los cuales distinguen el comportamiento cíclico de la fatiga de sólidos dúctiles y frágiles.

Esto gobierna alternadamente las dependencias específicas de la intensidad de esfuerzo alternativo y máximo sobre la relación del crecimiento de la grieta es decir, cómo  $da/dN$  depende



de  $\Delta K$  y  $K_{\max}$  (y así como el resultado del tiempo-vida como una función del esfuerzo alternativo o máximo), y las relaciones entre los umbrales para el crecimiento de la grieta por fatiga ( $\Delta K_{TH}$  y  $K_{\max,TH}$ ) y la iniciación de la grieta ( $K_o$ ) y en estado estable ( $K_c$ ) los valores de la resistencia de la fractura.

### **Propagación de la grieta a la fatiga en materiales metálicos dúctiles.**

El crecimiento de grieta subcrítica puede ocurrir en niveles de intensidad de esfuerzos ( $K$ ) menores que la resistencia a la fractura ( $K_c$ ) en algunas aleaciones metálicas cuando la carga cíclica es aplicada ( $\Delta K_{TH}/K_c \sim 0.1 - 0.4$ ). En concepto simplificado, es la acumulación de daño de la deformación plástica cíclica en la zona plástica en la punta de la grieta que cuenta para el mecanismo intrínseco del crecimiento de grieta por fatiga en niveles de  $K$  debajo de  $K_c$ . El proceso de falla por fatiga consiste de varios procesos distintos involucrando daños cíclicos iniciales (endurecimiento o ablandamiento cíclico), formación de un defecto inicial fatal (iniciación de grieta), propagación macroscópica de este defecto (crecimiento de grieta), y falla catastrófica final o inestabilidad.

El fenómeno físico de fatiga fue primero seriamente considerado a mediados del siglo XIX cuando las extensas fallas en ejes ferroviarios en Europa impulsado por Wöhler en Alemania conduciendo la primera investigación sistemática en falla de material bajo esfuerzos cíclicos hacia 1860 (Wöhler, 1860). Sin embargo, el principal impulso para la investigación dirigida a la etapa de la propagación de la grieta de falla por fatiga, oponiéndose a los simples cálculos de tiempo de vida, no ocurrió hasta mediados de 1960, cuando los conceptos de mecánica de fractura lineal elástica y así llamados ‘diseño de defecto de tolerancia’ fueron primero aplicado a el problema de crecimiento de fisura subcrítica (Paris y otros, 1961; Johnson y Paris, 1967). Tales aproximaciones reconocieron que todas las estructuras son figuradas, y que las grietas podrían iniciar muy temprano de vida de servicio y subcríticamente propagada. El tiempo de vida es entonces evaluado sobre la base del tiempo o numero de ciclos de carga para el crecimiento de la grieta sin detectar hasta la falla, mientras podría ser definido por una deformación permisible, o carga limitada, o criterio  $K_c$ . Implícito en tales análisis es que el crecimiento de grieta subcrítica se puede caracterizar en términos de algunos parámetros gobernantes que describen condiciones locales en la punta de la grieta todavía podrían ser determinada en términos de parámetros de carga, tamaño de grieta, y geometría. La mecánica de fractura elástica lineal y elástica no lineal tiene, datos, proporcionando la más apropiada metodología para tales análisis.

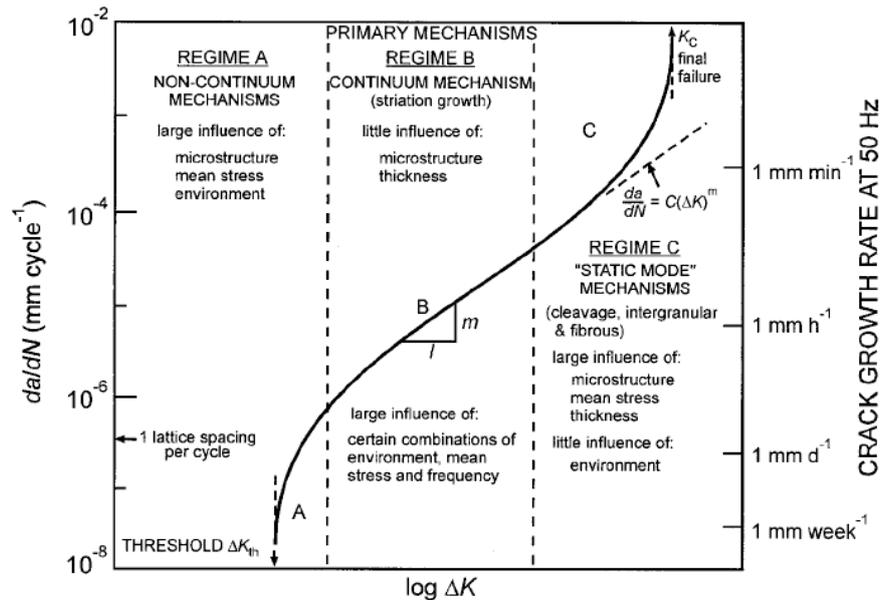
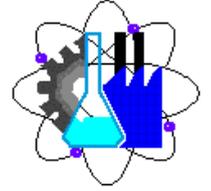
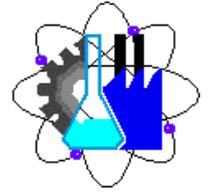


Figure 4. Schematic illustration of the typical variation in fatigue-crack growth rates  $da/dN$ , as a function of the applied stress-intensity range  $\Delta K$  in metallic materials, showing the regimes of primary growth-rate mechanisms and effects of several major variables on crack-growth behavior (Ritchie, 1977).

La naturaleza general del crecimiento de la grieta por fatiga en materiales metálicos y su descripción usando mecánica de fractura se pueden brevemente resumirse por el diagrama esquemático en la figura 4 mostrando la variación en  $da/dN$  con el rango de intensidad de esfuerzo nominal ( $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ ) (Ritchie, 1977). En la actualidad, las tasas de crecimiento dependen de numerosos factores además de  $\Delta K$ , aunque esta es la primera variable en fatiga del metal:

$$Da/dN = f[\Delta K, K_{max} \text{ o } (R), \nu, \text{ ambiente, forma de onda...}],$$

donde la relación de carga  $R$  es la relación de las cargas aplicadas mínimas y máximas ( $R = K_{min}/K_{max}$  para  $R$  positiva), y  $\nu$  es la frecuencia. Especialmente,, los resultados de las pruebas de



la relación de crecimiento de la grieta por fatiga para la mayoría de los materiales dúctiles presentan las siguientes características: (1) una región de bajos valores de  $\Delta K$  y  $da/dN$  (menores que  $\sim 10^{-9}$  m/ciclo) en la cual las grietas por fatiga aparecen inactivas debajo del umbral de la fatiga,  $\Delta K_{Th}$ ; (2) una región intermedia ( $\sim 10^{-9}$  a  $10^{-6}$  m/ciclo) del comportamiento de la ley de energía descrito por la ecuación de Paris (Paris y Erdogan, 1963):

$$da/dN = C(\Delta K)^m,$$

donde  $C$  y  $m$  ( $\sim 2$  a  $4$ ) son constantes de escalamiento del material; y (3) una región superior del crecimiento de grieta acelerado (arriba de  $\sim 10^{-6}$  m/ciclo) cuando  $K_{max}$  se aproxima a  $K_C$  o deformación plástica gruesa del espécimen en la carga límite. Aproximaciones similares se han sugerido para el crecimiento de la grieta bajo grandes escalas [Dowling y Begley, 1976] donde la relación de crecimiento ha sido relacionada a una  $J$ -integral cíclica ( $\Delta J$ ) o rango de desplazamiento de abertura de la punta de la grieta ( $\Delta CTOD$ ).

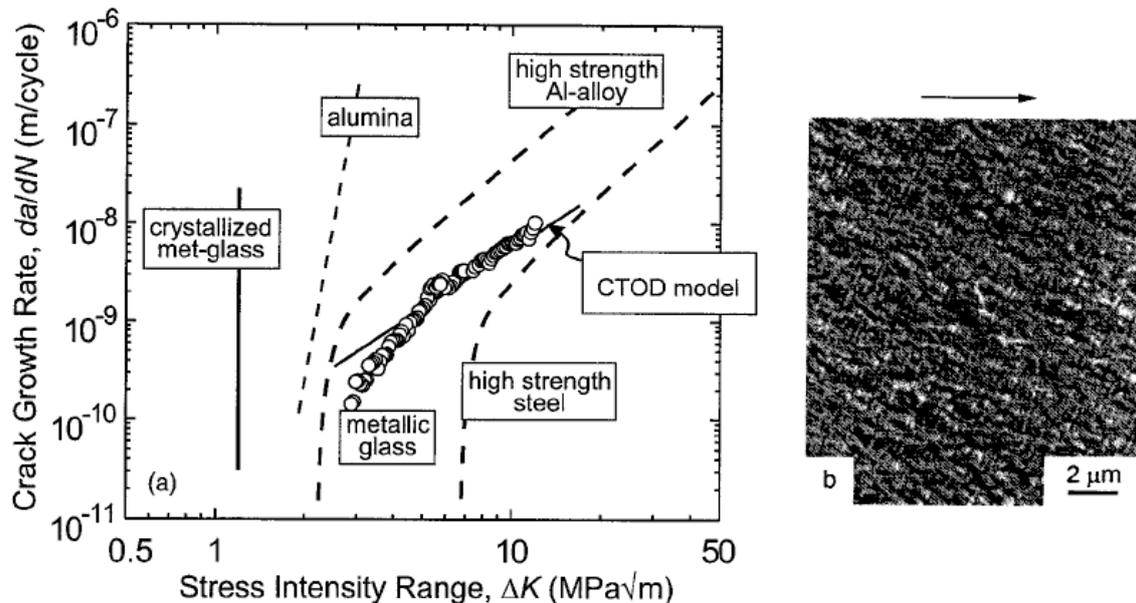
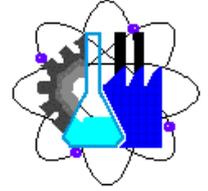


Figure 5. Fatigue-crack propagation in a bulk amorphous metal (metallic glass),  $Zr_{41.2}Ti_{13.8}Cu_{12.5}Ni_{10}Be_{22.5}$ , showing (a) fatigue-crack propagation rates scaling with the  $\Delta CTOD = 0.01\Delta K^2/\sigma_0 E'$  (where  $\sigma_0$  is the flow stress and  $E'$  is the appropriate Young's modulus), and (b) crack growth occurring via ductile striation formation (Gilbert et al. 1997). Arrow in (b) indicates direction of crack growth.



## **Differences and similarities between the fatigue of ductile and brittle materials**

Comparando a la extensa base de datos y comprensión de falla por fatiga en metales (Suresh, 1991; Hellín, 1997; Davidson y Lankford, 1992; Ritchie, 1979), los sistemas cerámicos e intermetálicos todavía requieren una investigación extensiva con respecto al comportamiento de fatiga. En tales materiales esta ahora claro que las cargas cíclicas inducen a una degradación progresiva en los mecanismos de endurecimiento (o protección) detrás de la punta de grieta que localmente eleva la fuerza manejada cerca de la punta. Esto es la supresión cíclica de la protección que es considerada ser la principal fuente para la susceptibilidad de los materiales frágiles a falla por fatiga. En contraste, la propagación de la grieta por fatiga en materiales metálicos involucran primeramente procesos de daños intrínsecos ocurriendo delante de la punta de grieta, es decir involucrando el avance de la grieta por desafilado y afilado de la punta de la grieta, claramente un mecanismo notable de fractura bajo cargas monotónicas. Adicionalmente, la protección, en la forma de los mecanismos del cierre de grieta (acuñado), puede actuar en la estela de la grieta.

Puesto que los mecanismos físicos de avance de la grieta y de protección de la punta de la grieta son totalmente diferentes en metales y cerámicos, las dependencias sobre las cargas alternativas y medias, específicamente  $\Delta K$  y  $K_{\max}$ , la intensidad de esfuerzo alternativo y máximo, respectivamente, son también totalmente diferentes.

### ***Concentración de la tensión***

La discrepancia que existe es debido a la presencia de defectos pequeños o grietas encontrados en la superficie o dentro del material. Estos defectos causan la tensión sobre la grieta tomando una orientación y geometría elíptica.

En la Figura 1, se puede observar en perfil la tensión que se da a través de una sección representativa que contiene una grieta interna, elíptico-formada.

También se observa la tensión con punto máximo en la extremidad de la grieta y que esta disminuye con respecto a la distancia de la grieta. También se puede observar como la tensión se concentra alrededor de la extremidad o del defecto de la grieta.

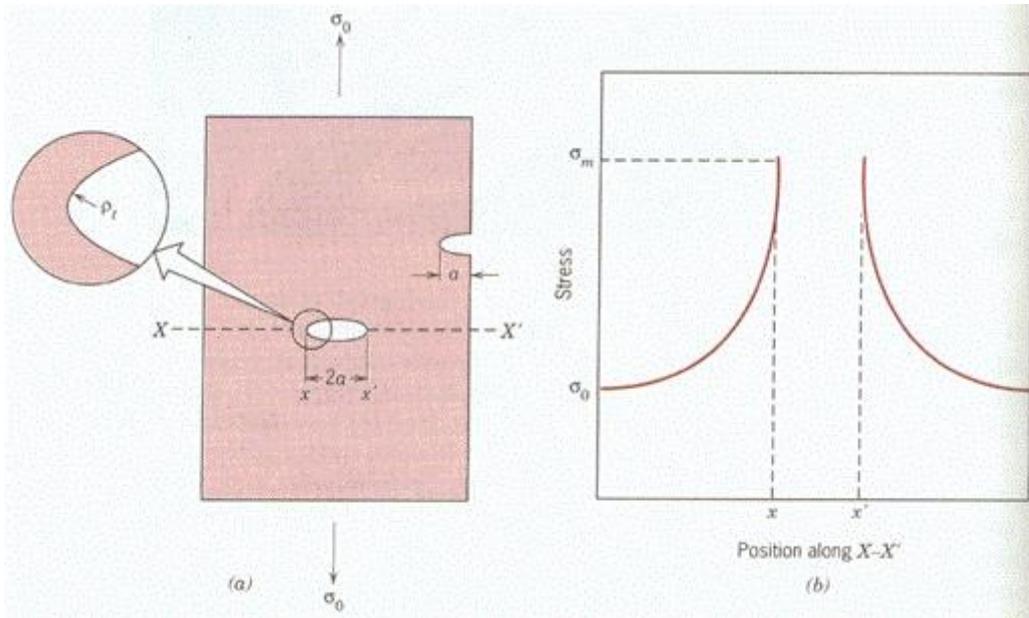
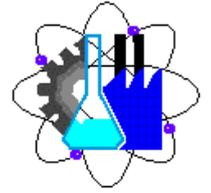


Figura. 1: (a) La geometría de las grietas superficiales e internas. (b) Perfil esquemático de la tensión a lo largo de la línea X-X en (a), demostrando la amplificación de la tensión en las posiciones de la extremidad de la grieta.

**Para Determinación de la tensión máxima en la extremidad de la grieta:** Se dice que si la grieta toma una forma elíptica y se orienta perpendicularmente con respecto al eje de la tensión aplicada, la tensión máxima,  $\sigma_m$  se puede calcular con respecto a la extremidad de la grieta por la **Ecuación 1**.

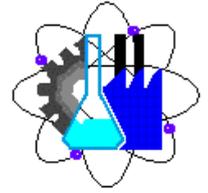
$$\sigma_m = 2\sigma_0 \left( \frac{a}{\rho_t} \right)^{1/2}$$

**Ecuación. 1: Determinación de la tensión máxima que rodea una extremidad de la grieta.**

**Donde:** La magnitud de la tensión extensible aplicada nominal está dada por  $\sigma_0$ ; y  $\rho$  es el radio de curvatura de la extremidad de la grieta; y  $a$  representa la longitud de una grieta superficial, o la mitad de la longitud de una grieta interna.

### Análisis de esfuerzos en Grietas.

El estudio de fracturas en elementos estructurales ha evolucionado en las últimas décadas con el análisis de la sensibilidad de los defectos de los extremos de las grietas o fisuras. Estas actúan



como concentradores de esfuerzos, ya que al aplicarse una fuerza externa a un cuerpo elástico que contiene una grieta, el material justamente adelante de la grieta es sometido a esfuerzos de tracción ( $\sigma$ ) muy grandes.

Asimismo, se presentan esfuerzos de corte ( $\tau$ ) sobre planos a  $45^\circ$  respecto al plano de la grieta. De modo que en el vértice de tal grieta, se alcanza el valor del esfuerzo admisible o el de fluencia, aunque el esfuerzo medio a que está sometido el cuerpo se mantenga en valores muy inferiores. Luego, la fractura se puede producir cuando es sobrepasado el valor del esfuerzo de fluencia en el vértice de la fisura o grieta.

### **Mecanismos de fallas.**

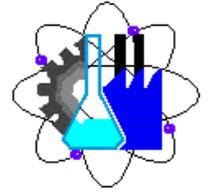
Existe una amplia clasificación de tipos de fallas que involucran la iniciación y propagación de fisuras o grietas, siendo la siguiente la clasificación más general:

1. Fractura Frágil.
2. Fractura Dúctil.
3. Fatiga.
4. Creep.
5. Corrosión-Fatiga.
6. Corrosión-Esfuerzo.

### **Características de la Fractura Frágil.**

En la fractura frágil es un funcionamiento rápido de grietas a través de un material tensionado. Las grietas viajan tan rápidamente que no puedes decir cuando el material esta por romperse. Es decir hay deformación plástica muy pequeña antes de que ocurra la falla. En la mayoría de los casos, éste es el peor tipo de fractura porque no puedes reparar el daño visible en una pieza o una estructura antes de que se rompa.

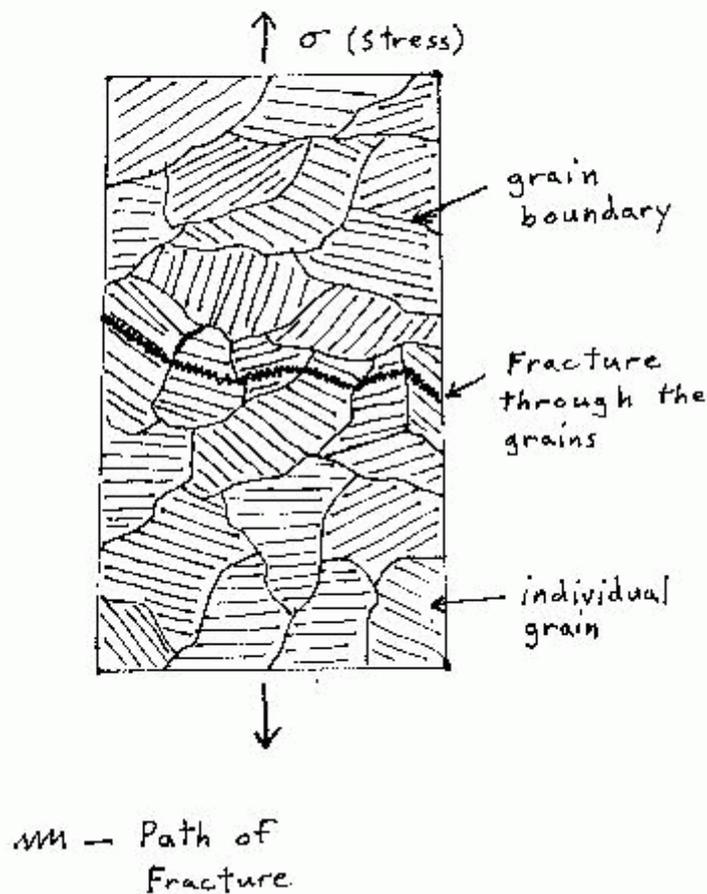
En fractura frágil, las grietas viajan perpendicularmente a la tensión aplicada. Esta fractura perpendicular deja una superficie relativamente plana en la rotura. Además de tener una superficie casi plana de la fractura, los materiales frágiles contienen generalmente un patrón en sus superficies de la fractura. Algunos materiales frágiles tienen líneas y cantos que comienzan en el origen de la grieta y que se separan hacia fuera a través de la superficie de la grieta.



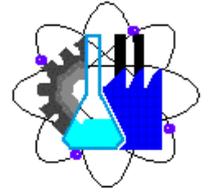
### Tipos de fractura frágil

El primer tipo de fractura es transgranular. En fractura transgranular, la fractura viaja a través del grano del material. La fractura cambia la dirección de grano al grano debido a la diversa orientación del enrejado de átomos en cada grano. Es decir cuando la grieta alcanza un grano nuevo, puede tener que encontrar una nueva trayectoria o plano de átomos para viajar encendido porque es más fácil cambiar la dirección para la grieta que él es rasgar a través. Las grietas eligen la trayectoria de menos resistencia. Puedes decir cuando una grieta ha cambiado en la dirección a través del material, porque consigues una superficie levemente desigual de la grieta.

## Transgranular Fracture

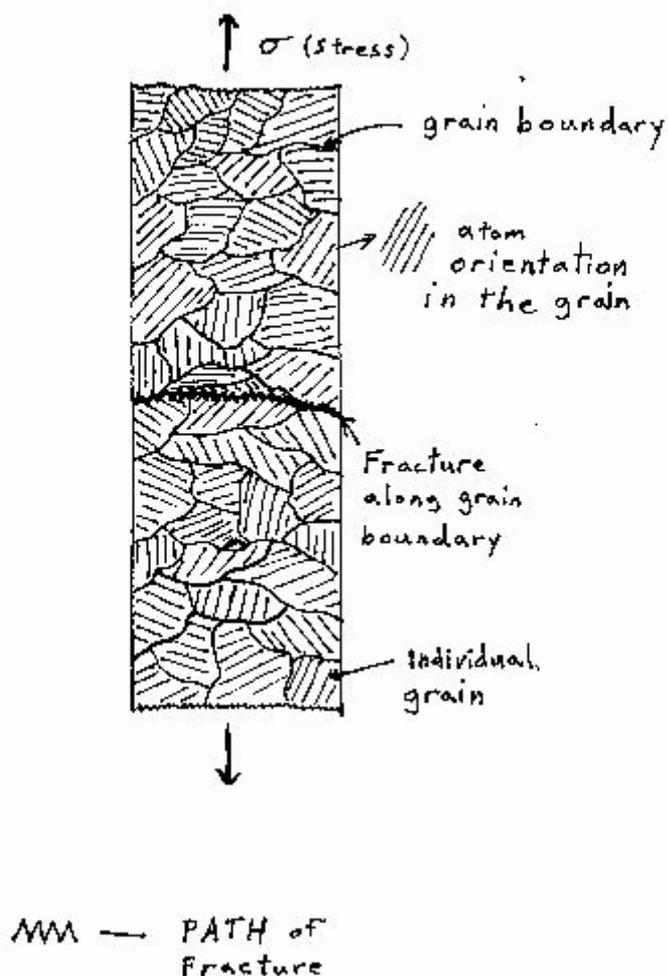


El segundo tipo de fractura es fractura intergranular. La fractura intergranular es la grieta que viaja a lo largo de los límites de grano, y no a través de los granos reales. La fractura intergranular



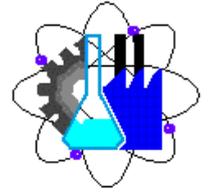
ocurre generalmente cuando la fase en el límite de grano es débil y frágil (es decir Cementite en los límites de grano del hierro). Pensar en un metal como un rompecabezas tridimensional grande. La fractura de Transgranular corta a través los pedazos del rompecabezas, y la fractura intergranular viaja a lo largo de los bordes precortados de los pedazos del rompecabezas.

## Intergranular Fracture



### Dúctil a la transición de la fractura frágil

En fractura, hay muchas cortinas del gris. La fractura frágil y la fractura dúctil son términos bastante generales que describen los dos extremos opuestos del espectro de la fractura. Los factores que hacen que un material se inclina hacia un tipo de fractura en comparación con el otro tipo de fractura son:



Sobre todo el **factor es temperatura**. Básicamente, en temperaturas más altas se baja la fuerza de la producción y la fractura es más dúctil en naturaleza. En el extremo opuesto, en temperaturas más bajas la fuerza de la producción es mayor y la fractura es más frágil en naturaleza. Esta relación con temperatura tiene que hacer con vibraciones del átomo. Mientras que la temperatura aumenta, los átomos en el material vibran con mayores frecuencias y amplitud. Esta vibración creciente permite que los átomos bajo tensión se deslicen a los nuevos lugares en el material (es decir los enlaces de la rotura y los nuevos de la forma con otros átomos en el material). Este resbalamiento de átomos se considera en el exterior del material como deformación plástica, una característica común de la fractura dúctil.

Cuando la temperatura disminuye, la vibración del átomo disminuye, y los átomos no desean deslizarse a las nuevas localizaciones en el material. Tan cuando se convierte la tensión en el material arriba bastante, la rotura de los átomos apenas sus enlaces y no forman nuevos. Esta disminución del resbalamiento causa poca deformación plástica antes de fractura.

En las temperaturas moderadas (con respecto al material) el material exhibe características de ambos tipos de fractura. En la conclusión, la temperatura determina la cantidad de fractura frágil o dúctil que puede ocurrir en un material.

Otro factor que determina la cantidad de fractura frágil o dúctil que ocurra en un material es densidad de dislocación. Cuanto más alta es la densidad de dislocación, más frágil la fractura será en el material. La idea detrás de esta teoría es que la deformación plástica viene del movimiento de dislocaciones.

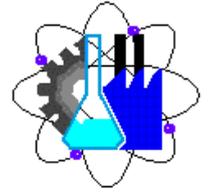
La fractura frágil se caracteriza por:

1. La grieta se propaga con muy poca deformación plástica en el vértice de ésta.
2. Dos factores siempre necesarios para que ocurra la iniciación de la fractura frágil son en bajas temperaturas y esfuerzos.
3. El inicio de la inestabilidad se inicia con esfuerzos nominales menores a los esfuerzos de fluencia.

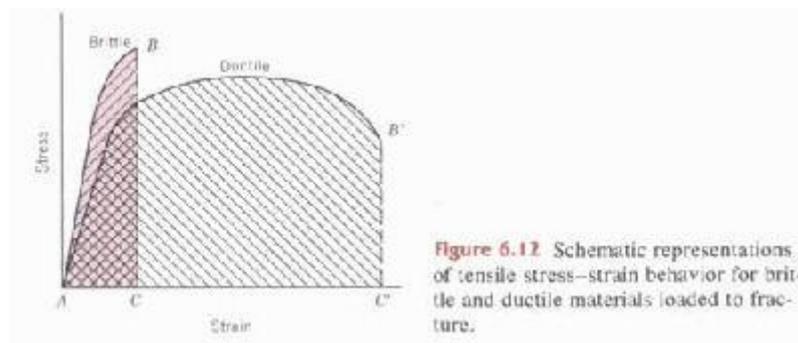
### **Características de la Fractura Dúctil.**

#### **Fractura dúctil**

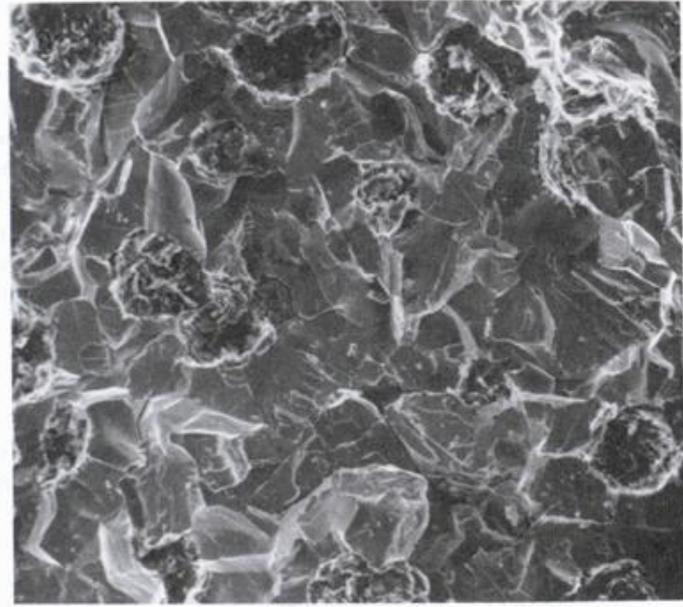
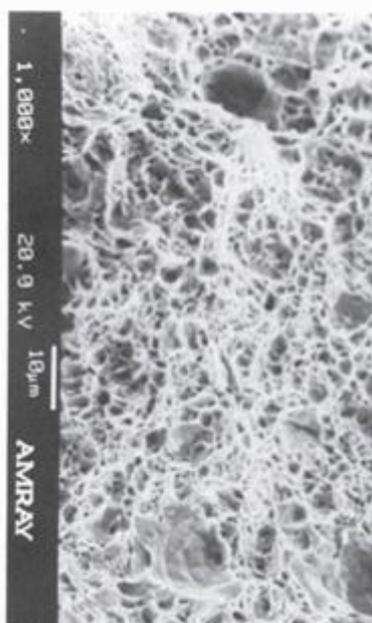
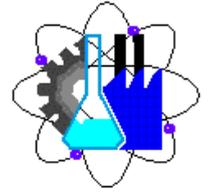
Uno de los conceptos más importantes y más dominantes del campo entero de la ciencia material y de la ingeniería es fractura. En su forma más simple, la fractura se puede describir como solo



cuerpo que es separado en pedazos por una tensión impuesta. Para los materiales de la ingeniería hay solamente dos modos posibles de la fractura, dúctil y frágil. Generalmente la diferencia principal entre la fractura frágil y dúctil se puede atribuir a la cantidad de **deformación plástica** que el material experimenta antes de que ocurra la fractura. Los materiales dúctiles demuestran cantidades grandes de deformación plástica mientras que los materiales frágiles demuestran poco o nada de deformación plástica antes de fractura. El cuadro 1 (abajo), una curva extensible del stress-strain, representa el grado de deformación plástica exhibido por los materiales frágiles y dúctiles antes de fractura.

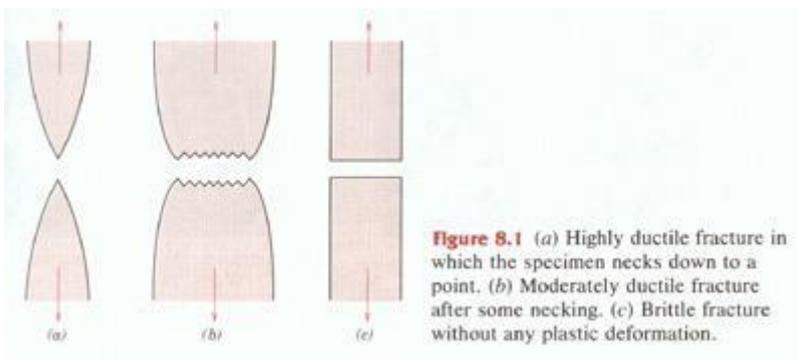


La iniciación y la propagación de la grieta son esenciales de fracturar. La manera con la cual la grieta propaga con el material da la gran penetración en el modo de la fractura. En los materiales dúctiles (**fractura dúctil**), la grieta se mueve lentamente y es acompañada por una cantidad grande de deformación plástica. La grieta no extenderá generalmente a menos que se aplique una tensión creciente. Por otra parte, haciendo frente a **fractura frágil**, las grietas se separaron muy rápidamente con poco o nada de deformación plástica. Las grietas que propagan en un material frágil continuarán creciendo y aumentando de magnitud que se inician una vez. Otro manierismo importante de la propagación de grieta es la manera de la cual la grieta que avanza viaja a través del material. Una grieta que pasa a través de los granos dentro del material está experimentando **fractura transgranular**. Sin embargo, una grieta que propaga a lo largo de los límites de grano se llama una **fractura intergranular**. El cuadro 2 (abajo) demuestra un fractograph del electrón de la exploración del hierro fundido dúctil, examinando una superficie transgranular de la fractura.

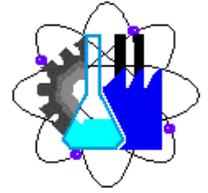


(a)

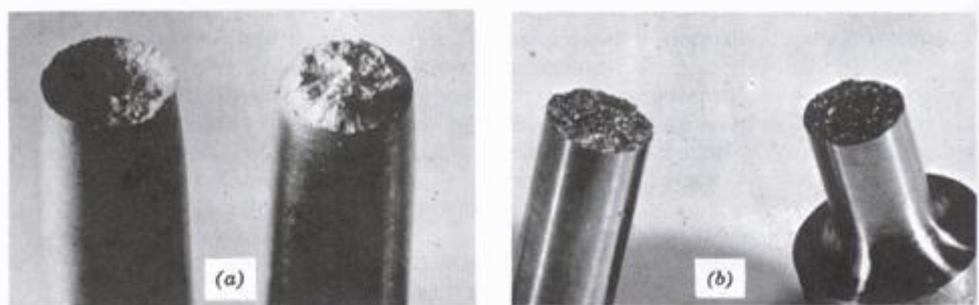
En niveles macroscópicos y microscópicos, las superficies dúctiles de la fractura tienen características distintas. Macroscópico, las superficies dúctiles de la fractura tienen regiones más grandes del collarino y un aspecto más áspero total que una superficie de la fractura frágil. El cuadro 3 (abajo) demuestra las diferencias macroscópicas entre dos especímenes dúctiles (a, b) y el espécimen frágil (c).



En el nivel microscópico, las superficies dúctiles de la fractura también aparecen ásperas e irregulares. La superficie consiste en muchos microvoids y hoyuelos. El cuadro 4 (debajo de izquierda) y el cuadro 5 (debajo de la derecha) demuestran las calidades microscópicas de las superficies dúctiles de la fractura. La falta de muchos materiales dúctiles se puede atribuir para ahuecar y fractura del cono. Esta forma de fractura dúctil ocurre en las etapas que inician después de que el collarino comience. Primer, los microvoids pequeños forman dentro del material. Después, la deformación continúa



y los microvoids agrandan para formar una grieta. La grieta continúa creciendo y se separa lateralmente hacia los bordes del espécimen. Finalmente, la propagación de grieta es rápida a lo largo de una superficie que haga alrededor de un ángulo de 45 grados con el eje extensible de la tensión. La nueva superficie de la fractura tiene un aspecto muy irregular. El esquilar final del espécimen produce un tipo forma en una superficie de la fractura y una forma de la taza del cono en la superficie adyacente de la fractura que conecta, por lo tanto la fractura del nombre, de la taza y del cono. El cuadro 6 (abajo) demuestra la taza y el cono, y la fractura frágil en aluminio.



**Figure 8.3** (a) Cup-and-cone fracture in aluminum. (b) Brittle fracture in a mild steel. (From H. W. Hayden, W. G. Moffatt, and J. Wulff, *The Structure and Properties of Materials*, Vol. III, *Mechanical Behavior*, p. 144. Copyright © 1965 by John Wiley & Sons. New York. Reprinted by permission of John Wiley & Sons, Inc.)

Las pruebas de Charpy y de Izod miden la energía del impacto de un espécimen. Usando un aparato y afectando un espécimen con un péndulo cargado martillar la energía del impacto puede ser medido. Un uso primario de las pruebas de Charpy y de Izod es determinarse si un material experimenta frágil a la transición dúctil con temperatura que disminuye. Frágil a la transición dúctil se relaciona directamente con la dependencia de la temperatura de la energía del impacto absorbida. También una examinación de la superficie de la falta puede probar muy beneficioso. Si una sección de la superficie de la falta se parece demostrar las características visuales de la fractura frágil y dúctil, entonces frágiles a la transición dúctil es evidente en esa gama de temperaturas. Es muy importante recordar que con la mayoría de los especímenes, hay una venda bastante ancha de las temperaturas que apoyan frágil a la transición dúctil. Por lo tanto, porque muchos especímenes es casi imposible predecir cualquier una temperatura como la temperatura de la transición. En el cuadro 7 (abajo), se da un gráfico que determina frágil a la transición dúctil a través de una prueba de impacto para un acero laminado en caliente 1018.

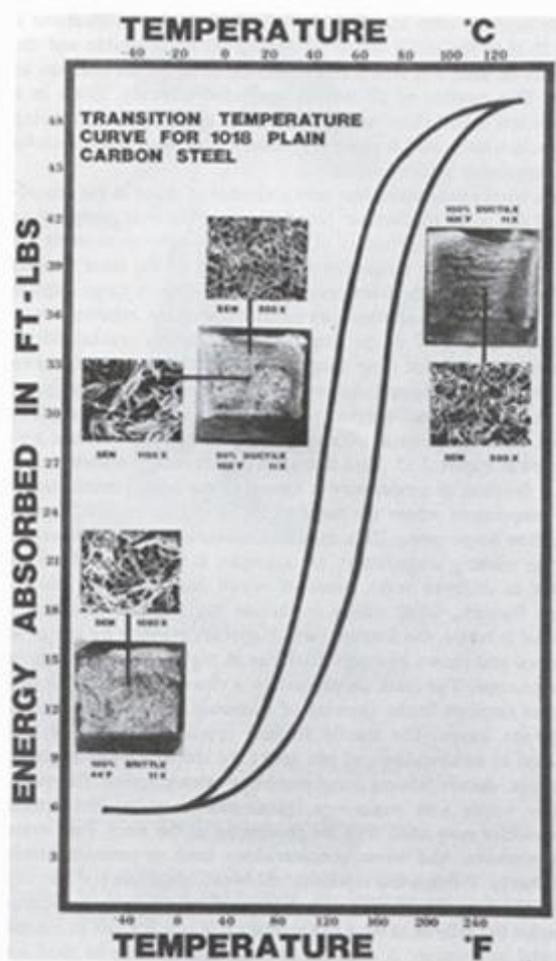
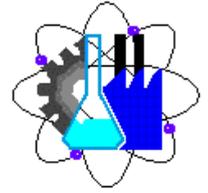
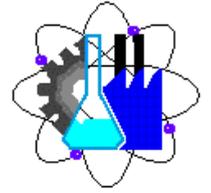


Figure 2.15 Brittle-ductile transition temperature determined by the impact test for a 1018 hot-rolled steel. (From senior project of Jon Gergen, Cal Poly.)

En la mayoría de las situaciones del diseño un material que demuestra fractura dúctil se prefiere generalmente por varias razones. Sobre todo, la fractura frágil ocurre muy rápidamente y catastrófico sin ninguna advertencia. Los materiales dúctiles plástico deformen, de tal modo retardando el proceso de la fractura y dando la hora amplia para el problema de ser corregido. En segundo lugar, debido a la deformación plástica, más energía de tensión es necesaria causar fractura dúctil. Los materiales siguientes, dúctiles se consideran ser materiales de “perdón”, debido a su dureza que puedes incurrir en una equivocación en el uso, diseño de un material dúctil y todavía el material no fallará probablemente. También, las características de un material dúctil se pueden realzar con el uso de uno de los mecanismos de la consolidación. El [endurecer de tensión](#) es un ejemplo perfecto, pues el material dúctil está deformado cada vez más su aumento de la fuerza y de la dureza debido a la generación cada vez más de dislocaciones. Por lo tanto, en usos de la ingeniería, especialmente las que tienen preocupaciones de seguridad implicadas, los



materiales dúctiles son la opción obvia. La seguridad y la formalidad son las preocupaciones principales en diseño material, pero para lograr estas metas allí tiene que ser una comprensión cuidadosa de la fractura, frágil y dúctil. La fractura y la falta que entienden de materiales conducirán a ingeniero de los materiales a desarrollar materiales y productos más seguros y más confiables.

### **Esfuerzos en la punta de la grieta, factor K.**

En un material isotrópico linealmente elástico, bajo condiciones de esfuerzo plano o deformación plana, los campos de esfuerzos y de deformaciones en la punta de la grieta presentan una singularidad del orden de  $\propto r^{1/2}$ . Tal expresión fue desarrollada por Irwin, <sup>2 y 3</sup> quien demostró que, en la vecindad de la punta de la grieta, el campo de esfuerzos elásticos puede ser expresado de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sigma_{ij}(\theta) \qquad \epsilon_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \epsilon_{ij}(\theta)$$

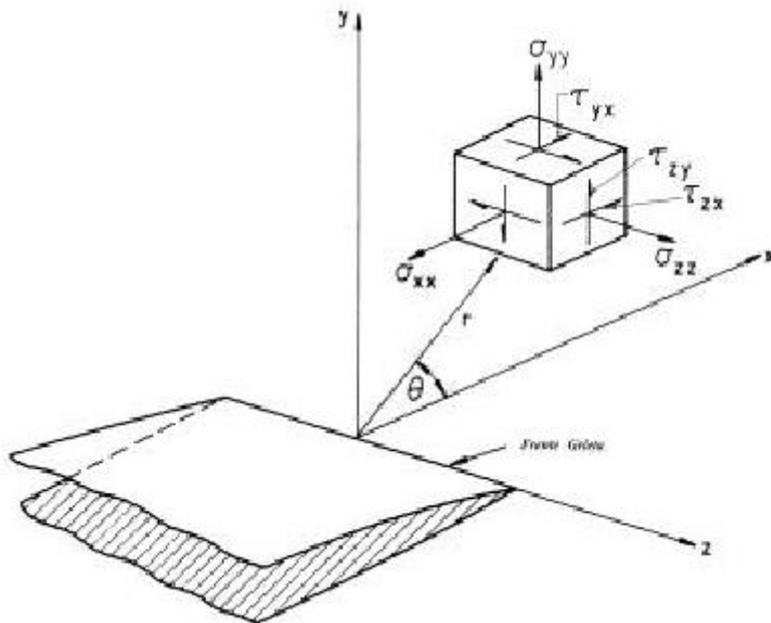
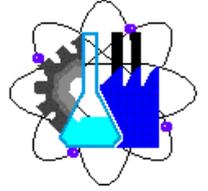
Es decir, el campo de esfuerzos en la punta de la grieta en el Modo I está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 - \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 1 + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

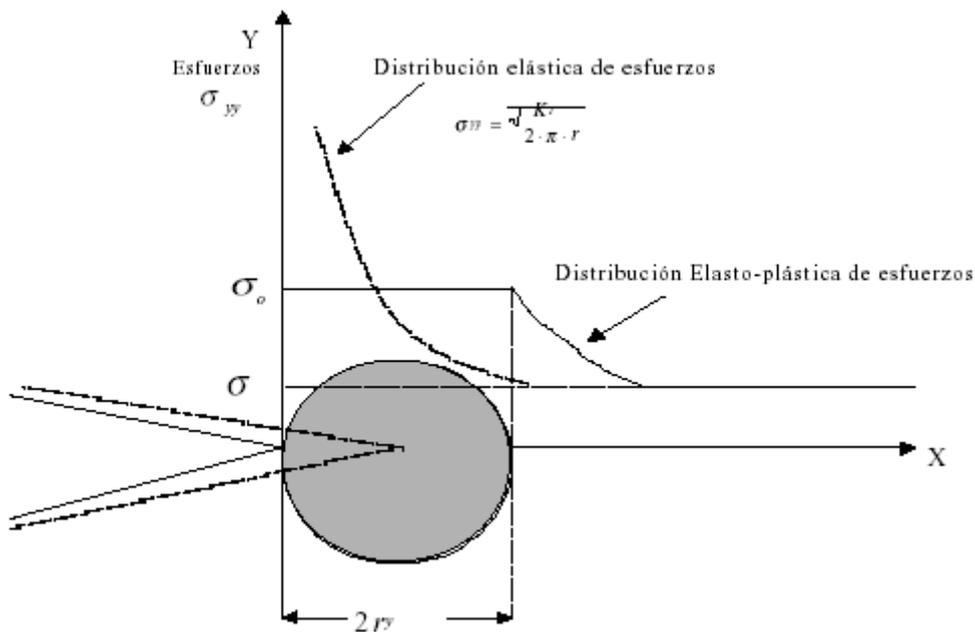
$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \left( \text{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \end{bmatrix}$$

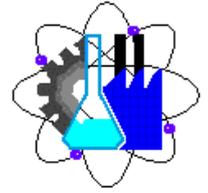
Esfuerzo plano y Deformación plana, respectivamente.



□ El factor de intensidad de Esfuerzos “K” depende linealmente de la carga aplicada y es una función de la longitud de la grieta y otros parámetros geométricos característicos del cuerpo. Este factor K entrega una medida del nivel de deformación en la vecindad de la grieta en una condición de pequeña fluencia para una amplia variedad de geometrías.



Su expresión está dada por la siguiente ecuación:



$$K = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot F(a/W)$$

siendo :

$K$  = Factor de Intensidad de esfuerzos [ $\text{MPa} \sqrt{m}$ ].

$\sigma$  = Esfuerzo remoto aplicado al cuerpo [ $\text{MPa}$ ].

$a$  = Largo de la grieta [ $m$ ].

$F(a/W)$  = Factor de forma del cuerpo.

$W$  = Ancho del cuerpo.

### **Intensidad de la tensión**

La intensidad de la tensión del término no debe ser confundida con el trabajo de la concentración de la tensión hecho por Griffith. La concentración de la tensión es cómo la tensión se amplifica en una extremidad de la grieta, mientras que la intensidad de la tensión se utiliza para describir la distribución de la tensión alrededor de un defecto particular. Se utiliza este término al investigar modos de la fractura (acoplamiento a parte sobre  $K_{Ic}$ ), particularmente, la fractura del modo I, que es la más común. Se utiliza este término al computar las tensiones y las tensiones del plano que existen delante de una grieta móvil. Este valor es dependiente sobre muchas cosas y es diferente para cada material. Entre las cosas que depende encendido está la tensión aplicada, el tamaño y la colocación de la grieta, así como la geometría del espécimen.

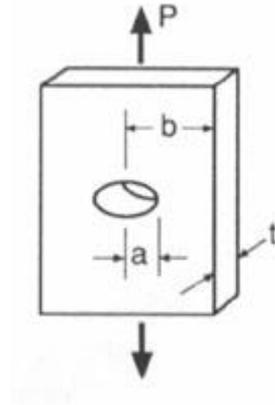
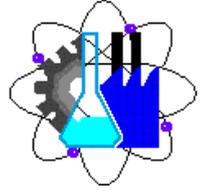
### **Dureza de la fractura**

¿Cuál es la [dureza  \$K\_{Ic}\$  de la fractura](#)?

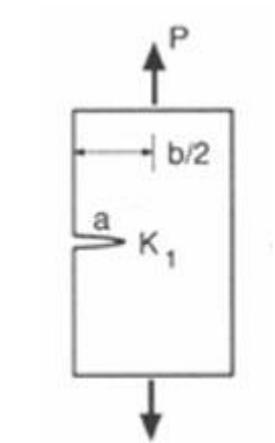
Fracturar la dureza,  $K_{Ic}$ , es la resistencia de un material a la falta de la fractura a partir de una grieta de preexistencia. Esta definición se puede expresar matemáticamente por la expresión siguiente:

$$K_{Ic} = \sigma \sqrt{\pi a} Y$$

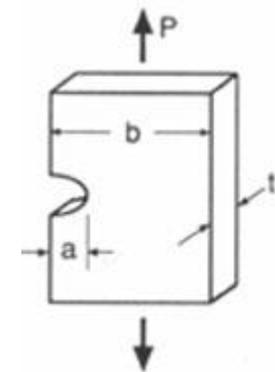
Donde está un dependiente  $Y$  sin dimensiones del factor encendido: la geometría de la grieta y del material, la configuración del cargamento (es decir si la muestra está conforme a la tensión o a la flexión), y el cociente de la longitud de la grieta a la anchura del espécimen,  $B$ . es la cantidad de carga (tensión) aplicada al espécimen, y  $a$  es la longitud de la grieta.



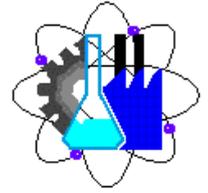
Cuadro 1 espécimen de A con una grieta interior. Observar que la longitud entera de la grieta es igual a  $2a$ .



Cuadro 2 espécimen de A con una grieta del por-grueso.



Cuadro 3 espécimen de A con una grieta de la superficie del semi-círculo.



Cuadros 1.2.3 de la fuente: *Ciencia material e ingeniería: Una introducción*, 3ro Edition, John Wiley & Sons, Inc. Nueva York.

El cuadro 1 demuestra que  $a$  no es siempre la longitud total de la grieta, pero es a veces mitad de la longitud de la grieta, en cuanto a una grieta interior. Los valores para  $Y$  varían con respecto a la forma y a la localización de la grieta. Algunos valores útiles de  $Y$  para las grietas cortas sujetadas a una carga de la tensión son como sigue:

$Y = 1.00$  para una grieta interior similar a la grieta demostrada en el cuadro 1

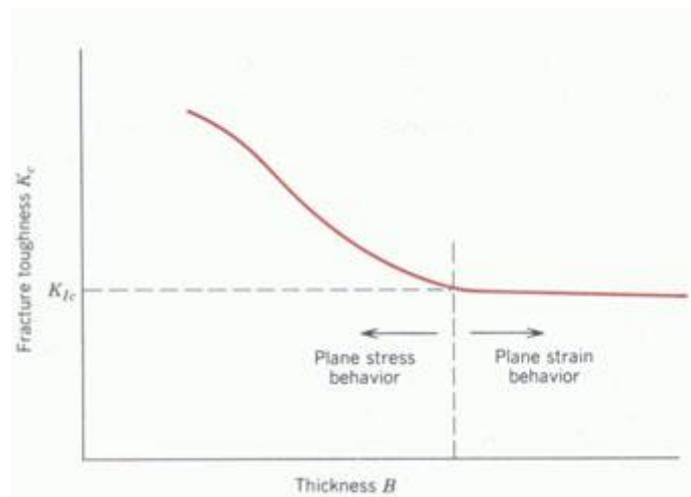
$Y = 1.12$  para una grieta de la superficie del por-grietas según las indicaciones del cuadro 2

$Y = 0.73$  para una grieta superficial mitad-circular según las indicaciones del cuadro 3

La dureza de la fractura,  $K_{Ic}$ , tiene las unidades acostumbradas inglesas de la PSI adentro, y las unidades del SI de  $MPa \sqrt{m}$  (1.2).

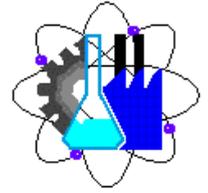
¿Cuál es la **dureza plana de la fractura de la tensión,  $K_{Ic}$** ?

Para las muestras finas, el valor  $K_{Ic}$  disminuye con el aumento del grueso de la muestra,  $b$ , como se muestra por Figure.



Una dureza de la fractura contra gráfico del grueso. Observar la localización de  $K_{Ic}$ . Fuente: *Ciencia material e ingeniería: Una introducción*, 3ro Edition, John Wiley & Sons, Inc. Nueva York.

En última instancia, el  $K_{Ic}$  se convierte en independiente de  $b$ , a este punto la muestra reputa bajo condiciones de la **tensión plana**. Este valor fijo del  $K_{Ic}$  se conoce como la dureza plana de la fractura de la tensión,  $K_{Ic}$ .  $K_{Ic}$  se define matemáticamente cerca:



$$K_{Ic} = \sigma \sqrt{\pi a} \text{ de } Y$$

Una de las características más importantes de cualquier material para virtualmente todos los usos del diseño es dureza de la fractura. Dado las unidades inusuales de MPa ( $m^{1/2}$ ), la dureza de la fractura es una manera cuantitativa de expresar “la resistencia de un material a la fractura frágil cuando una grieta está presente.” Si un material tiene un valor grande de la dureza de la fractura experimentará probablemente dúctil fractura. La fractura frágil es muy característica de materiales con un valor bajo de la dureza de la fractura.

Diferencias entre la dureza de la fractura:

Hay realmente cuatro diversos tipos de dureza de la fractura, de  $k_c$ , de KIC, de KIIC, y de KIIC. El  $k_c$  se utiliza para medir la dureza de la fractura de un material en una muestra que tenga un grueso que sea menos que un cierto valor crítico, B. Cuando el grueso del material es menos que B, y se aplica la tensión, el material está en un estado llamado **tensión del plano**.

$$B \geq 2.5 \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_Y} \right)^2$$

Eq. Que me calcula el grueso mínimo del material antes del comportamiento **plano de la tensión** ocurre.

Donde:

B = grueso mínimo a distinguir entre el  $k_c$  y KIC

Dureza del  $k_c$  = de la fractura, cuando la muestra tiene un grueso menos que B

$\sigma_Y$  = tensión de producción del material

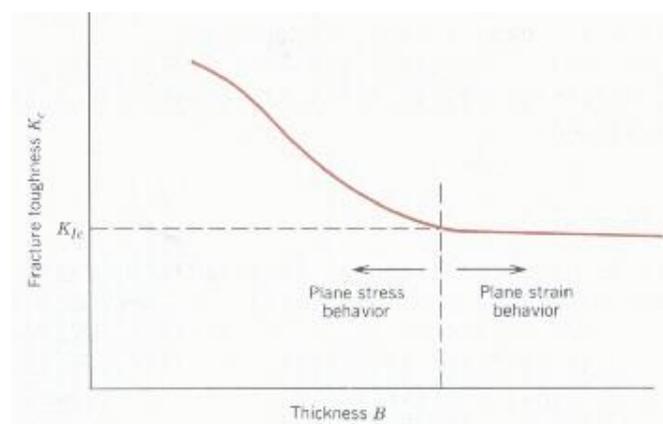
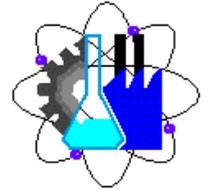


Figura.1 Dureza de la fractura en función del grueso material

$$K_c = Y \sigma \sqrt{\pi a}$$

Eq. La dureza de la fractura de un material con un grueso menos que el B.



Dureza del  $K_{Ic}$  = de la fractura, cuando la muestra tiene un grueso menos que  $B$   
 $Y$  = relacionado constante a la geometría de la muestra  
 $a$  = longitud de la grieta (grieta superficial), una mitad longitud de la grieta (grieta interna)  
 $\sigma$  = tensión aplicada al material.

$K_{Ic}$ ,  $K_{IIc}$ , y  $K_{IIIc}$  representan la dureza de la fractura de un material cuando una muestra del material tiene un grueso  $B$ . mayor que. Si una tensión se aplica a una muestra con un grueso  $B$  mayor que, está en un estado llamado tensión plana. Las diferencias entre  $K_{Ic}$ ,  $K_{IIc}$ , y  $K_{IIIc}$ , sin embargo, no dependen del grueso del material, sino a la dureza de la fractura de un material bajo tres diversos modos de la fractura, el modo I, el modo II, y el modo III, respectivamente.

$$K_{Ic} = Y\sigma \sqrt{\pi a}$$

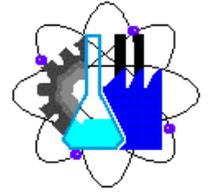
Eq. La dureza de la fractura de un material con un grueso igual a o  $B$  mayor que; cuando fractura en el modo I.

Dureza de  $K_{Ic}$  = de la fractura, cuando la muestra tiene un grueso  $B$  mayor que  
 $Y$  = relacionado constante a la geometría de la muestra  
 $a$  = longitud de la grieta (grieta superficial), una mitad longitud de la grieta (grieta interna)  
 $\sigma$  = tensión aplicada al material.

Tabla de la dureza de la fractura de los materiales comunes de la ingeniería.

Valores de  $K_{Ic}$  para los materiales de la ingeniería

Material	$K_{Ic}$ MPa (m) el <sup>1/2</sup>
Metales	
Aleación de aluminio	36
Aleación de acero	50
Aleación Titanium	44-66
Óxido de aluminio	14-28
De cerámica	
Óxido de aluminio	3-5.3
Soda-cal-cristal	0.7-0.8



Concreto	0.2-1.4
Polímeros	
Methacrylate de Polymethyl	1
Polystyene	0.8-1.1

### Calculo de Factor de Intensidad de Tensiones de Tensiones, K

#### Principio de la Superposición

El principio de superposición en régimen elástico lineal permite trasladar las cargas y desplazamientos impuestos sobre el contorno de un pieza a únicamente cargas distribuidas sobre la superficie de la grieta. Una grieta, desde el punto de vista teorico, no es otra cosa que una línea del silido incapacidad de transmitir cargas de un lado al otro (normales y tangenciales).

Falta.....

## CAPÍTULO 6

### MANEJO DEL SOFTWARE ANSYS 9.0

#### Introducción al análisis por elemento finito por Ansys 9.0

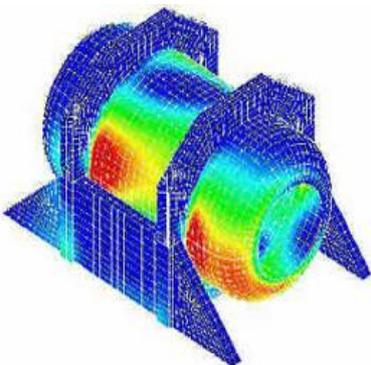
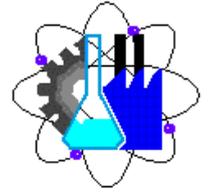


Figure 1 <http://www.noraneng.com>

#### ¿Que es el Análisis por Elemento Finito (AEF)?

El AEF consiste de un modelo por computadora de un material o diseño que esta bajo esfuerzo y se analiza para obtener resultados específicos. Se utiliza para el diseño de productos nuevos, y el refinamiento de productos existentes.

Una compañía tiene que poder ser capaz de verificar un diseño o similar las especificaciones de producto de un cliente antes de que se construya o se manufacture el producto final. También debe ser capaz de modificar un producto existente para aplicarlo en nuevas condiciones de servicio. En el caso de fallas estructurales, el AEF puede



utilizarse para ayudar a determinar las modificaciones de diseño para satisfacer las nuevas condiciones de diseño.

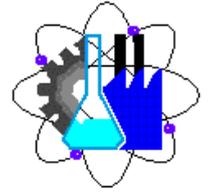
Existen dos tipos de análisis que se utilizan en la industria: modelación en dos (2-D) y tres dimensiones (3-D). El modelar en 2-D es relativamente simple y permite el análisis a ser efectuado por una computadora. El modelado en 3-D produce resultados mas precisos sin embargo solo se puede hacer efectivamente en las computadoras más rápidas. Dentro de cada uno de estos esquemas de modelación por computadora, el programador puede insertar numerosos algoritmos los cuales harán comportarse a los sistemas como lineales o no lineales. Los sistemas lineales son menos complicados y generalmente no toman en cuenta la deformación plástica. Los sistemas no-lineales si toman en cuenta la deformación plástica, y muchos de estos son capaces de simular todo el comportamiento de un material hasta su falla.

El AEF utiliza una técnica numérica llamada método del elemento finito (MEF). En general, existen 3 fases para realizar el análisis por esta técnica mediante paquetes de cómputo:

- Pre-procesamiento – definir el modelo de elemento finito y factores ambientales a ser aplicados.
- Análisis (solución del modelo del elemento finito)
- Post procesado de resultados (utilización de herramientas de visualización)

### **Pre-procesamiento**

El primer paso consiste en construir un modelo de elemento finito de la estructura a ser analizada. La descripción topológica de las características geométricas de la estructura se requiere en la mayoría de los paquetes de AEF. Esto puede realizarse en 1D, 2D o 3D o modelar mediante líneas, formas o representación de superficies respectivamente. El principal objetivo del modelo es hacer una replica efectiva de los parámetros importantes y características de la estructura real (Hieronimus, Klaus, “A Few Aspects on the Development of Structural Models,” SAE Technical Paper 770598, 1977). El mecanismo más simple para lograr una similitud del modelo con la estructura real en el análisis estructural es el utilizar planos digitales pre-existentes, modelos de CAD y/o la importación de datos al medio ambiente de la interfase del programa de AEF. Una vez creado el modelo geométrico de elemento finito, se utiliza un procedimiento de mallado para



definir y subdividir el modelo a pequeños elementos. En general un modelo de elemento finito se define por una red de mallas que están hechas mediante arreglos geométricos de elementos o nodos. Los nodos representan puntos en los cuales características tales como los desplazamientos son calculadas. Los paquetes de AEF utilizan números para identificar los nodos y poder ver las soluciones en las estructuras tales como deflexiones. Los elementos están limitados por una colección de nodos, y definen la masa localizada y propiedades de rigidez del modelo. Los elementos también se definen mediante números los cuales permiten relacionarlos con las deflexiones correspondientes o esfuerzos en lugares específicos del modelo.

### **Análisis (cálculo de la solución)**

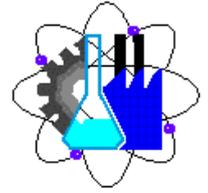
El siguiente paso es el análisis. La computadora realiza una serie de procedimientos de cálculo que involucran las fuerzas aplicadas, y las propiedades de los elementos que producen la solución del modelo. El análisis estructural permite la determinación de deformaciones, y esfuerzos causada por las cargas aplicadas a la estructura en forma de presión o carga gravitacional (peso).

### **Visualización**

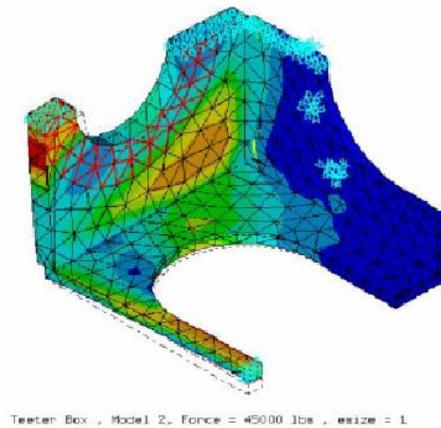
Los resultados pueden visualizarse y estudiarse utilizando diversas herramientas graficas dentro del paquete de AEF utilizado. Mediante la visualización de los resultados se puede identificar completamente las implicaciones del análisis. Las herramientas numéricas y graficas permiten la localización precisa de los datos de esfuerzo y deflexiones críticas.

### **¿Como se trabaja con el análisis por elemento finito?**

El AEF utiliza un sistema de puntos complejos llamados nodos los cuales forman a su vez una rejilla llamada malla (**Figura X**). Esta malla se programa para que contenga las propiedades estructurales del material las cuales definen como reaccionara la estructura a ciertas condiciones de carga. A los nodos se les asigna cierta densidad a través del material dependiendo de los niveles de esfuerzos anticipados sobre el área en particular. Las regiones sometidas a un alto esfuerzo tienen una mayor densidad de nodos que aquellas que experimentan poco o nulo esfuerzo. Los puntos de interés pueden consistir de: puntos de fractura de materiales previamente evaluados, chaflanes, esquinas, geometrías con detalles complejos, y áreas con alto esfuerzo. La malla actúa



como tela de araña en relación a que a partir de cada nodo adyacente se extiende un elemento de malla. Esta red de vectores es la que lleva las propiedades del material al objeto, creando muchos elementos.



Una amplia variedad de funciones objeto (variables dentro del sistema) están disponibles para su minimización o maximización:

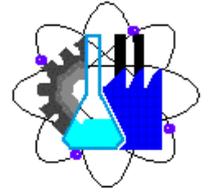
1. Masa, volumen, temperatura
2. Energía de deformación, esfuerzo-deformación
3. Fuerza, desplazamiento, velocidad, aceleración
4. Definida por el usuario (sintética)

Existen múltiples condiciones de carga que se pueden aplicar a un sistema. Algunos ejemplos son:

- Cargas puntuales, de presión, térmicas, por gravedad, centrífugas y estáticas
- Cargas térmicas a partir de soluciones de análisis de transferencia de calor
- Desplazamientos forzados
- Flujo de calor y convección
- Cargas dinámicas puntuales y de presión

Cada programa de AEF viene con una librería elemental, o se puede construir una con el tiempo. Algunos ejemplos de librerías son:

- Elementos en forma de varilla



- Vigas
- Placas/caparazones/Compósitos
- Paneles cortantes
- Elementos sólidos
- Resortes
- Elementos de masa
- Elementos rígidos
- Elementos viscosos

Muchos programas de AEFM también están equipados para utilizar múltiples materiales dentro de una estructura tales como:

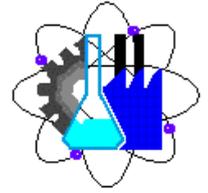
- Isotropicos
- Ortotropicos (propiedades iguales a 90 grados)
- Anisotropicos.

### **Tipos de análisis para ingeniería**

**Análisis Estructural.** Consiste de modelos lineales y no lineales. Los modelos lineales utilizan parámetros simples y asumen que el material no se deforma plásticamente. Los modelos no lineales consisten en esforzar el material más allá de su capacidad elástica. Los esfuerzos en el material entonces varían con la cantidad de deformación.

**Análisis Vibracional.** Se utiliza para evaluar un material en contra de vibraciones aleatorias, choque e impacto. Cada una de estas incidencias puede actuar sobre la frecuencia natural de vibración del material, la cual en turno, puede causar resonancia y subsiguiente falla del material.

**Análisis por Fatiga.** Ayuda a los diseñadores a predecir la vida de un material o estructura al mostrar los efectos de la carga cíclica sobre la muestra. Este análisis puede mostrar las áreas en donde la propagación de la grieta es mas susceptible a ocurrir. La falla debido a la fatiga puede mostrar también la tolerancia al daño del material.



**Análisis por Transferencia de Calor.** Se modela la conductividad térmica o la dinámica de fluidos térmicos de un material o estructura. Este puede consistir en estado estable o transferencia por transitorios. La transferencia en estado estable se refiere a propiedades térmicas constantes en el material que llevan a la difusión del calor lineal.

### **Resultados del análisis por elemento finito**

AEF se ha convertido en una solución a la tarea de predecir fallas debidas a esfuerzos no conocidos al mostrar áreas problemáticas del material y permitiendo a los diseñadores ver todos los esfuerzos teóricos actuando en el. Este método de evaluación y diseño es muy superior y reduce considerablemente costos de manufactura al no tener que construir y evaluar prototipos de cada diseño de ingeniería como se hacía en antaño.

## **CAPÍTULO 7**

### **SIMULACION DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZO CRITICO ( $K_{IC}$ ) PARA UN SOLIDO MEDIANTE ANSYS VERSION 9.0**

III.1 Diseño experimental

**FALTA**

III.2 Diseño de la probeta simulada mediante Autocad

**YA LO TENGO**

III.3 Introducción del modelo de la probeta a Ansys

Los ingenieros de hoy ahora tienen la capacidad de modelar un diseño en un ambiente de computadora y de aplicar cargas al diseño virtual, para una comprensión mejor de cómo las computadoras pueden ayudar a mejorar el diseño de la fractura.

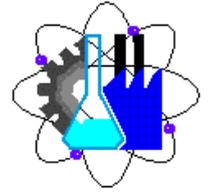
III.4 Pasos para la construcción y resolución del diseño experimental

I. Análisis de resultados (20)

**FALTA**

II. Conclusiones

**FALTA**



### III. Glosario

#### GLOSARIO

**Marcas de la playa** - también conocidas como marcas de la cáscara de la almeja. Beachmarks representa la propagación de una grieta a través de un material debido a la fatiga. Estas marcas son visibles al ojo, y pueden contener millares de striations.

**Condiciones de límite** - las características de un sistema que externamente se imponen ante él.

**La fractura frágil** - fracturar que ocurre por el propogation rápido de la grieta y sin la deformación macroscópica apreciable.

**El endurecer del caso** - este tratamiento superficial puede ser logra de muchas maneras, muy probablemente exponiendo el material a un ambiente rico carbonoso o del nitrógeno en las temperaturas elevadas. El carbón o el nitrógeno entonces difunde en la superficie de la fuerza superficial material, de aumento, así aumentando resistencia a los rasguños y a otros defectos superficiales.

**Fase de la dispersión** - la parte de él compuesto que es dentro de la fase de la matriz. e.g., las barras de acero en acero reforzaron el concreto.

**Fractura dúctil** - un modo de la fractura que es asistida la deformación plástica gruesa extensa.

**Elemento** - una sección de un cuerpo obtenido de dividir el cuerpo para arriba en un número finito de regiones.

**Vida de la fatiga** - el número de la falta de la causa de la voluntad de los ciclos en cierto nivel de la tensión

**Límite de la fatiga** - una característica del material y de su geometría. Si un material se carga debajo del límite de la fatiga, el material no fallará, sin importar el número de ciclos que está conforme a.

**Fuerza de la fatiga** - la tensión en la cual la falta ocurre para un número dado de ciclos.

**Dureza de la fractura (kc)** - el valor crítico en el cual puede ser utilizado especificar las condiciones para la fractura frágil.

**Fractura intergranular** - fractura de materiales polycrystalline por la prórroga de la grieta a lo largo de límites de grano.

**Kc** - La dureza de la fractura de un material que tiene grueso menos que algún minnum calculaba valor.

**KIC** - La dureza de la fractura de un material que tiene grueso mayor que algún minnum calculaba valor.

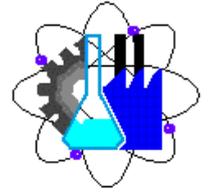
**Fase de la matriz** - la parte del compuesto que abarca totalmente la fase de la dispersión. <sup>5</sup> e.g., la matriz es el concrete en concreto reforzado acero.

**Tensión mala** - tensión media entre el máximo y la tensión mínima. Para una tensión cíclica invertida la tensión mala sería cero.

**Acoplamiento** - la rejilla de un sistema finito del elemento

**Nodo** - puntos en los cuales diversos elementos se articulan juntos; los nodos son las localizaciones donde están ser aproximado los valores de los desconocido (generalmente dislocaciones).

**Tensión plana la** condición, en donde, para el cargamento extensible, hay perpendicular cero de la tensión al eje de la tensión y a la dirección de la propagación de grieta; esta condición se encuentra en placas gruesas, y la dirección de la cero-tensión es perpendicular a la superficie de la placa.



**Dureza plana de la fractura de la tensión ( $K_{1c}$ )** - la condición, en donde, para el cargamento extensible, hay perpendicular cero de la tensión al eje de la tensión y a la dirección de la propagación de grieta; esta condición se encuentra en placas gruesas, y la dirección de la cero-tensión es perpendicular a la superficie de la placa.

**La tensión plana** - el estado que una muestra del material es adentro si una tensión se aplica a ella y su grueso es menos que un cierto valor mínimo.

**Deformación plástica** - deformación que es permanente o nonrecoverable después del lanzamiento de la carga aplicada. Es acompañada por dislocaciones atómicas permanentes.

**Porosidad** - una fracción del volumen de un material que es vacío, o sin material.

**El ciclo de la tensión de Repeatrd** - considerado más comúnmente en usos de la ingeniería que el ciclo invertido de la tensión, el ciclo repetido de la tensión es una onda del seno que es asimétrica sobre el eje de x. El máximo y las tensiones mínimas no son iguales y contrario en muestra.

**Ciclo invertido de la tensión** - este tipo de ciclo de la tensión tiene una amplitud simétrica sobre el eje de x. El máximo y las tensiones mínimas son iguales, pero contrario en muestra.

**Martilleo tirado** - cuando un material se bombardea con el acero pequeño, redondo tirado (es decir los bb, buckshot) a altas velocidades, se llama martilleo tirado. Este proceso aumentará la resistencia a la fallo de cansancio agregando dislocaciones y endureciendo la superficie, que es donde una grieta puede comenzar debido a los defectos superficiales.

**Matriz de la tiesura** - una matriz que define las características geométricas y materiales de un sistema.

**El endurecer de tensión** - el aumento en dureza y fuerza de un metal dúctil como plástico está deformido debajo de su temperatura de la recristalización.

**La concentración de la tensión ( $K_t$ )** - es la medida del grado a el cual una tensión externa se amplifica en la extremidad de una grieta pequeña.

**La intensidad de la tensión ( $k$ )** - es una función de la tensión aplicada y del tamaño y la posición de la grieta que especifica la intensidad en la extremidad de una grieta.

**Striations** - estas marcas se piensan para ser el adelanto de una grieta a través de un material. Desemejante de Beachmarks, Striations se piensa para ser el adelanto de una grieta debido a un ciclo de cargamento.

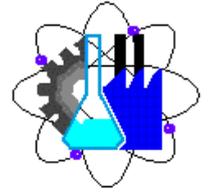
**Fractura de Transgranular** - fractura de materiales polycrystalline por la propagación de grieta a través de los granos.

**Fuerza de la producción ( $\sigma_y$ )** - está la tensión en 0.002 compensaciones de la tensión en la curva de la tensión/de la tensión del material. También, es el punto de la transición de la deformación elástica a la deformación plástica.

#### IV. Apéndices

### Apéndice A

#### VALIDACIÓN DEL TIPO Y NÚMERO DE ELEMENTO



Se llevó a cabo el análisis de una placa con una grieta lateral, usando el programa de elemento finito ANSYS. Este análisis consta en variar: el tipo de elementos, el espesor de la placa, número de divisiones en el espesor, número de elementos en lado de la grieta, el radio y el número de elementos en la punta de la grieta. El material es acero martensítico AISI-4340 con un modulo de elasticidad de 193 GPa, densidad 7800 kg/m<sup>3</sup> y coeficiente de Poisson 0.3. Las dimensiones de la placa se muestran en la figura 1A, el tamaño de la grieta es de 20 mm y el espesor se varió de 5, 10, 50 y 100 mm. Se aplicó en el lado superior de la placa un esfuerzo a tensión  $\sigma$  de 1 GPa, y el lado inferior de la placa se fijó completamente.

En el programa ANSYS se puede determinar el factor de intensidad de esfuerzo (SIF, por sus siglas en ingles) por *esfuerzo plano* y *deformación plana*. Sin embargo el criterio por el cual se determine el SIF depende del espesor de la placa.

$$espesor < 2.5(K_{IC}/\sigma) \text{ Análisis por } \textit{esfuerzo plano} \quad (1A)$$

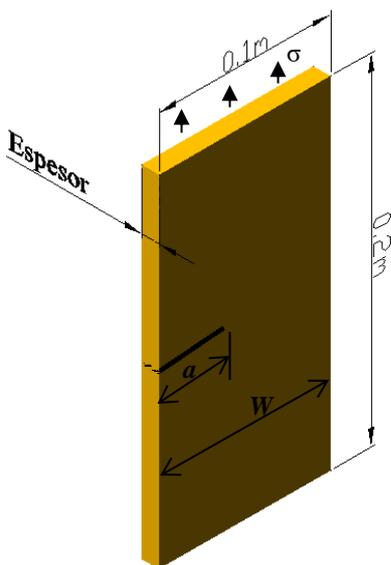
Con la siguiente ecuación se calcula el SIF para esta placa con grieta lateral

$$K_I = Y\sigma\sqrt{a} \quad (2A)$$

$$Y = 1.99 - 0.4a' + 18.7a'^2 - 34.8a'^3 + 53.85a'^4$$

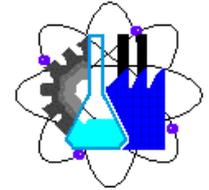
$$a' = (a/W)$$

donde  $Y$  es un parámetro que involucra la geometría de la grieta y del componente,  $a$  es el tamaño de la grieta,  $W$  ancho de la placa y  $\sigma$  una función que representa la magnitud del esfuerzo en el componente.



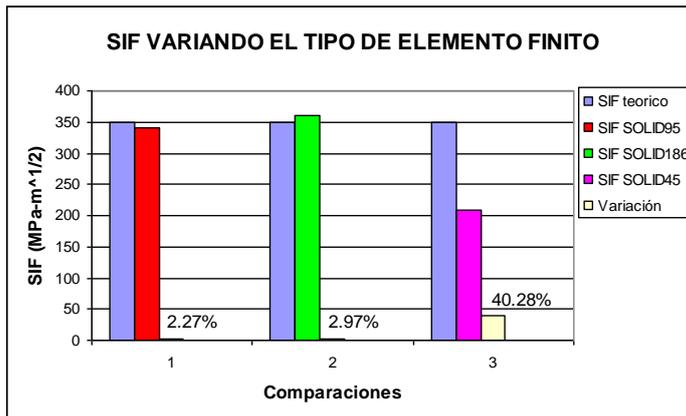
**Figura 1A.** Geometría de la placa.

La tabla 1A y figura 2A presenta los factores de intensidad de esfuerzo obtenidos de tres tipos de elementos finitos los cuales son: SOLID95, SOLID186 y SOLID45 con 1086, 1096 y 1229 respectivamente. Como el espesor de la placa es de 10 mm se realizó el análisis por *esfuerzo plano*. Se observa que para este espesor y números de elementos finitos el SIF en la placa con una grieta de 20 mm, el resultado obtenido con SOLID95 se aproxima más al valor calculado por la ecuación (1A), existiendo una variación de 2.27%. Además cabe mencionar que es el tipo de elemento recomendado por ANSYS.



**Tabla 1A.** Factor de intensidad de esfuerzos variando el tipo de elemento finito.

FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZO			
TEÓRICO	SOLID95	SOLID186	SOLID45
348.71	340.78	359.41	208.22



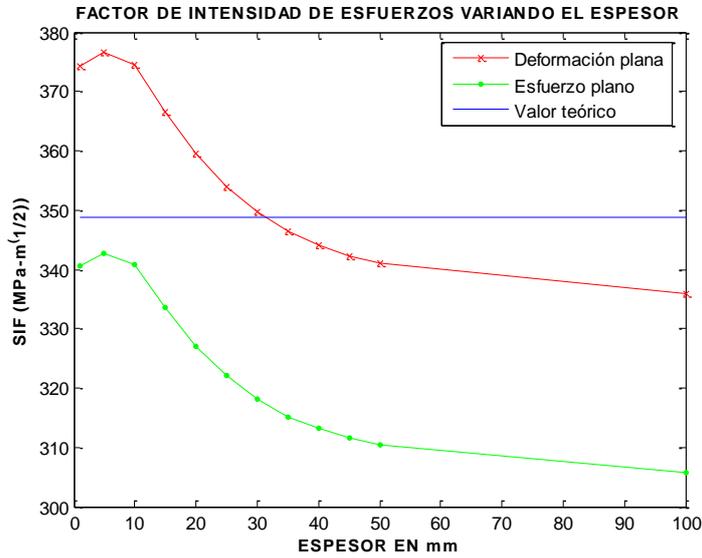
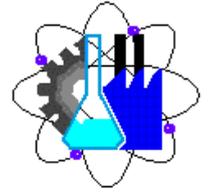
**Figura 2A.** Factor de intensidad de esfuerzos variando el tipo de elemento finito.

Una vez conocido el tipo de elemento finito adecuado para determinar el SIF, se analizó la relación de la ecuación (2A) para determinar el comportamiento del factor al variar el espesor. Se realizó el análisis con espesores de 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 y 100 mm. El modelo discreto de la placa para cada espesor está compuesto por 7827 nodos y 1092 elementos. Con la relación de la ecuación para un  $K_{IC}$  de  $137.375 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$  y un esfuerzo de 1 GPa se obtiene un espesor de 47.17 mm, es decir menor a este espesor se debe realizar el análisis por *esfuerzo plano* y espesores mayores por *deformación plana*. Sin embargo se observa en la tabla 2a y figura 3A que por *esfuerzo plano* los valores del factor de intensidad de esfuerzos se aproximan al valor teórico con un espesor menor a 15 mm con una variación entre 1.7 y 4.3%. Por *deformación plana* arriba de 15 mm se acerca el valor del SIF numérico al teórico, presentándose una variación de 0.2 % con un espesor de 30 mm.

Otro análisis que se llevó a cabo, fue determinar el factor de intensidad de esfuerzos en la placa con el mismo tamaño de grieta pero en esta ocasión se dividió el espesor de la placa en más elementos finitos. Se realizó el análisis por *esfuerzo plano* con una placa de espesor de 10 mm y por *deformación plana* una placa con espesor de 50 mm, la primera tiene 1, 5 y 10 divisiones en el espesor y la segunda 1, 10 y 25 divisiones. El objetivo en esta parte es determinar cuánto varía el factor de intensidad de esfuerzo con un mayor número de elementos finitos en el espesor de la placa. Se observa en la tabla 3A y en las figuras 4A y 5A que el número de elementos a través del espesor afecta en el SIF resultante. En la placa con 10 mm espesor al incrementando el número de elementos se aproxima cada vez más

**Tabla 2A.** Factor de intensidad de esfuerzos variando el espesor de la placa.

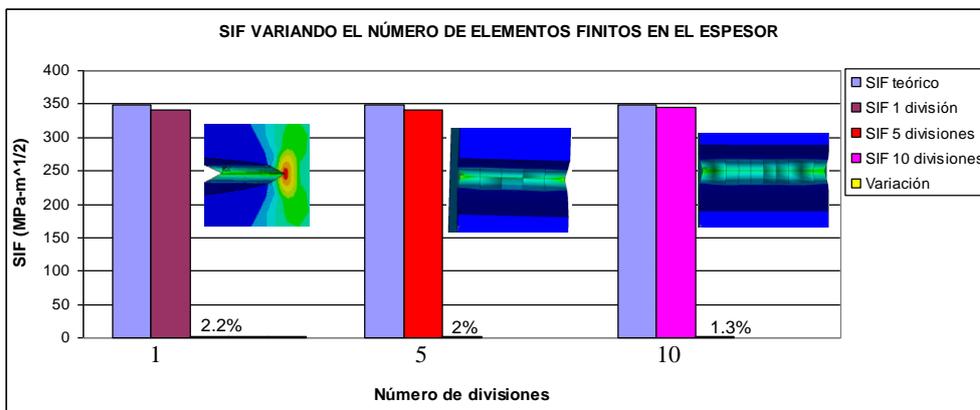
Espesor, mm	1	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	100
SIF Teórico, $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$	348.7	348.7	348.7	348.7	348.7	348.7	348.7	348.7	348.7	348.7	348.7	348.7
<b>Deformación plana</b>												
SIF Numérico, $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$	374.2	376.7	374.7	366.5	359.5	353.9	349.6	346.4	344	342.3	341.1	335.9
Variación, %	6.8	7.4	6.9	4.8	3	1.4	0.2	0.6	1.3	1.8	2.1	3.6
<b>Esfuerzo plano</b>												
SIF Numérico, $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$	340.5	342.8	340.8	333.5	327.1	322	318.2	315.2	313.1	311.5	310.4	305.7
Variación, %	2.3	1.7	2.2	4.3	6.2	7.6	8.7	9.6	10.2	10.6	11	12.3



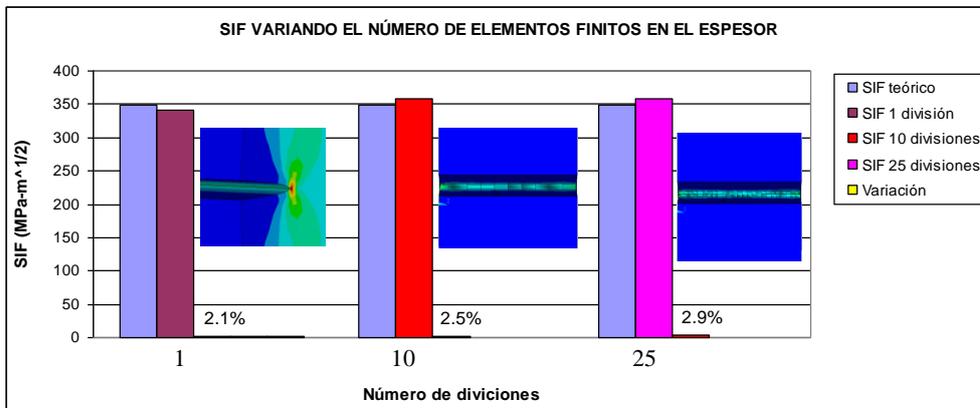
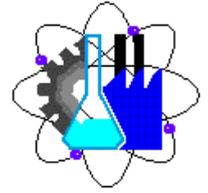
**Figura 3A.** Factor de intensidad de esfuerzos variando el espesor de la placa.

**Tabla 3A.** Factor de intensidad de esfuerzos variando el número de elementos finitos en el espesor de 10 mm.

Número de divisiones	ESPESOR 10 mm ( <i>Esfuerzo plano</i> )			ESPESOR 50 mm ( <i>deformación plana</i> )		
	1	5	10	1	10	25
SIF Teórico, MPa·m <sup>1/2</sup>	348.7	348.7	348.7	348.7	348.7	348.7
SIF Nmerico, MPa·m <sup>1/2</sup>	340.8	341.5	344.2	341.1	357.8	359.1
Variación, %	2.2	2	1.3	2.1	2.5	2.9



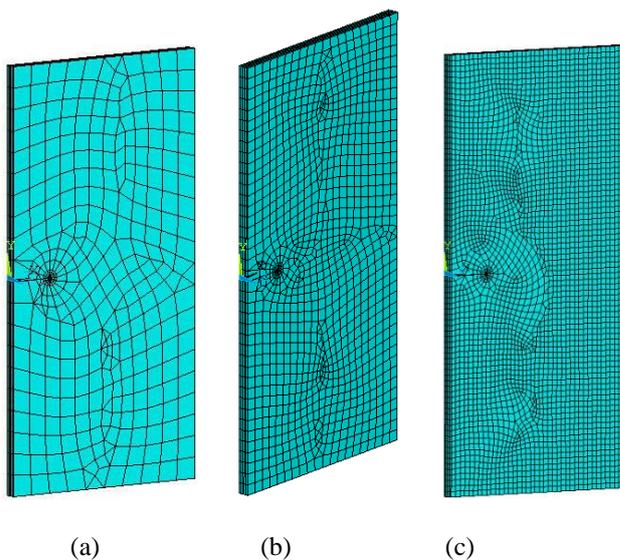
**Figura 4A.** Factor de intensidad de esfuerzos variando el número de elementos finitos en el espesor de 10 mm.



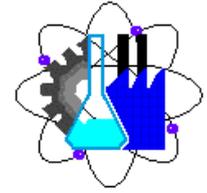
**Figura 5A.** Factor de intensidad de esfuerzos variando el número de elementos finitos en el espesor de 50mm.

al valor obtenido teóricamente. Sin embargo en la placa de 50 mm de espesor al incrementarse el número de elementos finitos se aleja del valor teórico.

A continuación se determinará cuanto afecta el número de elementos en lado de la grieta en el cálculo de factor de intensidad de esfuerzos. Este análisis se realizó por esfuerzo plano en una placa con un espesor de 5 mm y con 5 divisiones a través del mismo. En la figura 6A se muestran los modelos discretos con el número de elementos finitos en el lado de la grieta. En la tabla 4A y la figura 7A presentan el comportamiento del factor de intensidad de esfuerzo variando el número de elementos, donde se observa que no existe influencia ya que se tiene una variación desde 1.3 a 1.6 % con respecto al valor teórico variando los elementos desde 368 a 3269.

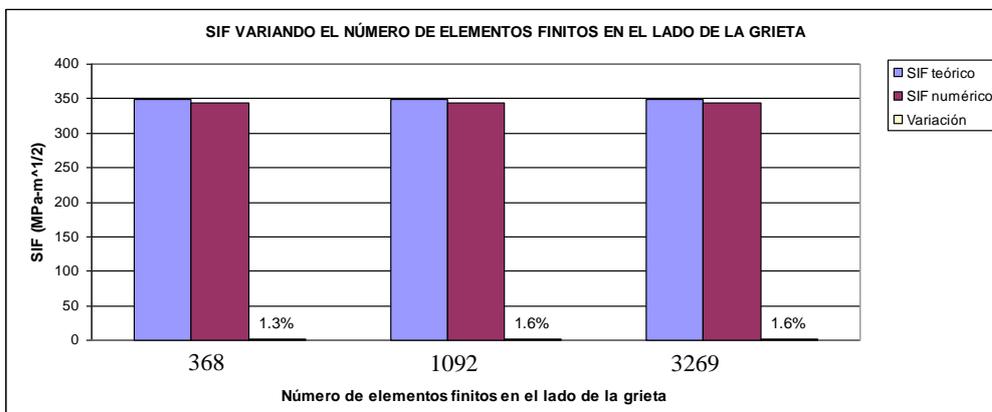


**Figura 6A.** Factor de intensidad de esfuerzos variando el número de elementos finitos en lado de la grieta; (a) 368 elementos lado de grieta, 1840 total de elementos; (b) 1092 elementos lado de grieta, 5460 total de elementos; (c) 3269 elementos lado de grieta, 16345 total de elementos.



**Tabla 4A.** Factor de intensidad de esfuerzos variando el número de elementos finitos en el lado de la grieta.

	<b>ESPESOR 5 mm (<i>Esfuerzo plano</i>)</b>		
Número de elementos en lado de grieta	368	1092	3269
Número total de elementos	1840	5460	16345
SIF Teórico, MPa-m <sup>1/2</sup>	348.7	348.7	348.7
SIF Nmerico, MPA-m <sup>1/2</sup>	344.27	343.15	343.12
Variación, %	1.3	1.6	1.6



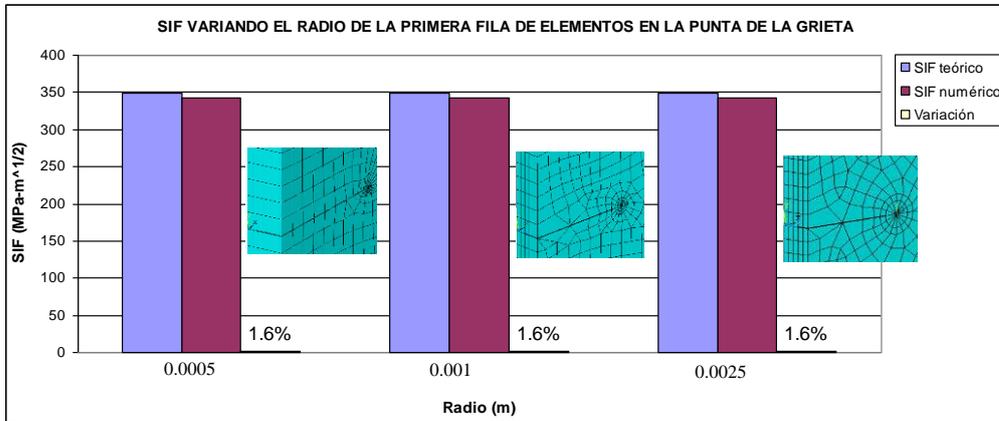
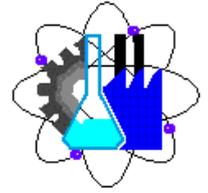
**Figura 7A.** Factor de intensidad de esfuerzos variando el número de elementos finitos en el lado de la grieta.

Ahora se verificará como influye el radio de la primera hilera de elementos alrededor de la punta de la grieta. El espesor de la placa es de 5 mm y tiene 5 elementos finitos a través del espesor. El análisis se realizó por *esfuerzo plano*. En la tabla 5A y figura 8A se observa que no influye la variación del radio de la primera fila de elementos finitos, alrededor de la punta de la grieta en el factor de intensidad de esfuerzo.

**Tabla 5A.** Factor de intensidad de esfuerzos variando el radio de la primera hilera de elementos alrededor de la grieta.

	<b>ESPESOR 5 mm (<i>Esfuerzo plano</i>)</b>		
Radio alrededor de la grieta, m	0.0005	0.001	0.0025
Número total de elementos	18600	17390	16345
SIF Teórico, MPa-m <sup>1/2</sup>	348.7	348.7	348.7
SIF Nmerico, MPA-m <sup>1/2</sup>	343.15	343.19	343.12
Variación, %	1.6	1.6	1.6

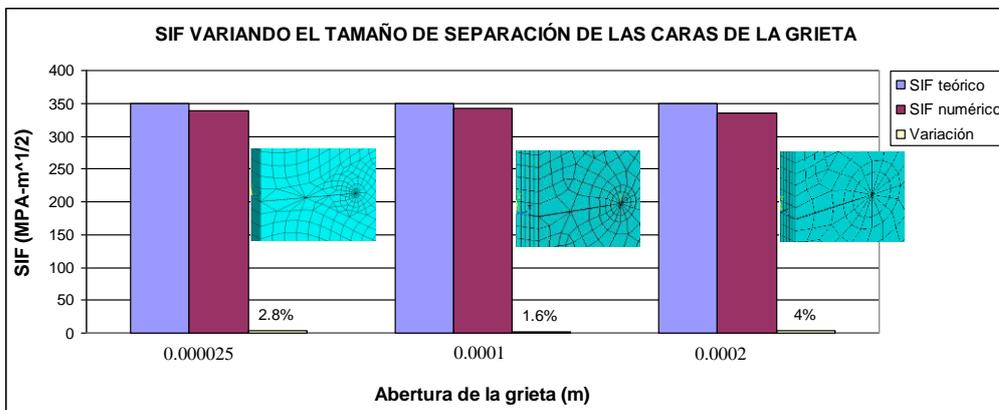
También se verificará como influye la abertura de la grieta en el factor de intensidad de esfuerzo. Puesto que para realizar el análisis por el programa ANSYS se recomienda por el fabricante que se debe considerar una relación entre el tamaño de la grieta con la separación de las caras de la misma de  $a/200$ . Sin embargo se realizará el análisis con aberturas de la grieta de 0.000025, 0.0001 y 0.0002 mm teniendo un radio en la punta de la grieta de 0.000625, 0.0025 y 0.005 mm, respectivamente. El espesor de la placa es de 5 mm y tiene 5 elementos finitos a través del espesor. El análisis se realizó por *esfuerzo plano*. Se observa en la tabla 6A y figura 9A que el tamaño de la abertura de las caras de la grieta si influye y se tiene la menor variación con la recomendación que proporcionan los fabricantes del programa.



**Figura 8A.** Factor de intensidad de esfuerzos variando el radio de la primera hilera de elementos alrededor de la grieta.

**Tabla 6A.** Factor de intensidad de esfuerzos variando la abertura de la grieta.

	<b>ESPESOR 5 mm (<i>Esfuerzo plano</i>)</b>		
Abertura de la grieta, m	0.000025	0.0001	0.0002
Número total de elementos	20134	16345	12165
SIF Teórico, MPa·m <sup>1/2</sup>	348.7	348.7	348.7
SIF Nmerico, MPa·m <sup>1/2</sup>	338.9	343.12	334.47
Variación, %	2.8	1.6	4

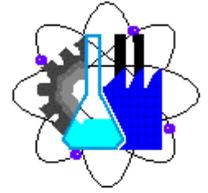


**Figura 9A.** Factor de intensidad de esfuerzos variando la abertura de la grieta.

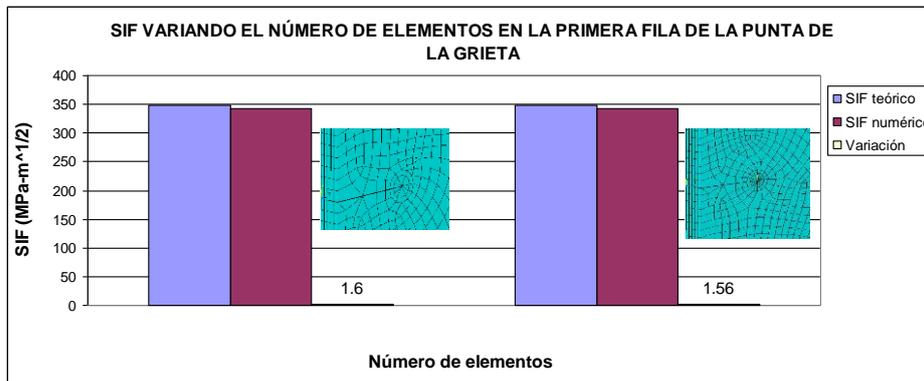
Finalmente se realizó el análisis por elemento finito variando el número de elementos finitos en la primera fila alrededor de la punta de la grieta. El espesor de la placa es de 5 mm y tiene 5 elementos finitos a través del espesor. El análisis se realizó por *esfuerzo plano*. En este análisis se observa que el número de elementos finitos alrededor de la punta de grieta no afecta en el SIF.

**Tabla 7A.** Factor de intensidad de esfuerzos variando el número de elementos finitos en la primera fila de la punta de grieta.

	<b>ESPESOR 5 mm (<i>Esfuerzo plano</i>)</b>		
Número de elementos alrededor de la grieta, m	8	12	16



Número total de elementos	---	15505	16345
SIF Teórico, MPa·m <sup>1/2</sup>	348.7	348.7	348.7
SIF Nmerico, MPa·m <sup>1/2</sup>	---	343.26	343.12
Variación, %	---	1.6	1,56

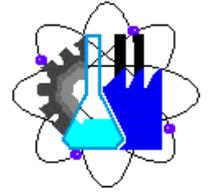


**Figura 10A.** Factor de intensidad de esfuerzos variando el número de elementos finitos en la primera fila de la punta de grieta.

## Referencias

### Bibliografía

- 1.- Anderson, T.L. (1991). *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. CRC Press, Boca-Raton –London – New York – Washington
- 2.- ANSYS (2006). *ANSYS Release 9.0 Documentation*. SAS IP, ANSYS Inc., United States of America.
- 3.- Basquin, O. H., *The Experimental Law of Endurance Test*, Proc. ASTM, vol. 10, 1910, p. 625.
- 4.- Coffin, L. F. Jr., *A Study of the Effects of Cyclic Thermal Stress on A Ductile Material*, Trans ASME, Vol. 76, 1954, p. 931.
- 5.- González Velásquez, J. L. *Mecánica de Fractura*. 2a Edición, México, Limusa, 2004, p. 188.
- 6.- Martin, J. F., Topper, T. H. and Sinclair, G. M., *Computer Based Simulation of cyclic Stress Strain Behavior*, T & A. M. Report No. 326, University of Illinois, Urbana, July 1969.
- 7.- Manson, S. S., *Behavior of Materials under Constant Thermal Stress*, Heat Transfer Symposium, University of Michigan, Engng. Research Institute, 1953, p. 9.
- 8.- Morrow, JoDean, Martin, J. F. and Dowling, N. E. *Local Stress-Strain Approach to Cumulative Fatigue Damage Analysis*, T & A. M. Report No. 379, University of Illinois, Urbana, April 1973.



- 
- 9.- Neuber, H., *Theory of Stress Concentration of Shear-Strained Prismatical Bodies with Arbitrary Nonlinear Stress-Strain Law*, Trans. ASME, J. Applied Mechanics, Vol. 8, 1961, p. 544.
10. Paris, P. C., and Sih, G. C., *Stress Analysis of Cracks, Fracture Toughness and Testing and its Applications*, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, STP 381, pp. 30-83 (1965).
- 11.- Rao, J. S. *Turbine Blade Life Estimation*. Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Technology, Delhi, New Delhi India, 2000, Alpha Science International Ltd.
- 12.- Schmidt, R. A. and Paris, P. C., *Threshold for Fatigue Crack Propagation and Effects of Load Ratio and Frequency*, Progress in Flow Growth and Fracture, ASTM STP 536, 1973, p. 79.
- 13.- Shigley J. E. and Mischke C. R., (2002). *Diseño en Ingeniería Mecánica*, Sexta Edición, Ed. McGraw-Hill Interamericana, S.A. de C.V.
- 14.- Topper, T. H., Wetzel, R. M. and Morrow, JoDean, *Neuber's Rule Applied to Fatigue of Notched Specimens*, J. of Materials, Vol. 4, No.1, March 1969, p. 200.
- 15.- Topper, T. H. and Sandor, B. I., *Effects of Mean Stress on Fatigue Damage Simulation*, T & A. M. Report No. 318, University of Illinois, Urbana, August 1968.
- 4.- Brown, W. F. and Srawley, J. E., Plane strain crack toughness testing of high strength metallic materials. *ASTM STP 410*, (1966).
- 24.- Broek, D. and Vlieger, H., *The Thickness effect in plane stress fracture toughness*, Nat. Aerospace Inst. Amsterdam, Rept. 74032 (1974).
- 29.- Bluhm, J. I., A model for the effect of thickness on fracture toughness, *ASTM Proc. 61*, (1961) pp.1324-1331.
- 30.- Isherwood, D. P. and Williams, J. G., The effect of stress-strain properties on notched tensile failure in plane stress. *Eng. Fract. Mech.*, 2 (1970) pp. 19-35.
- 31.- Anderson, W. E., *Some designer-oriented views on brittle fracture*, Battelle Northwest, Rept. SA-2290 (1969).
- 32.- Sih, G. C. and Hartranft, R. J., Variation of strain energy