El Problema del Transporte

Reporte Técnico

Ocotlan Díaz Parra[1], Marco Antonio Cruz Chavez[1]

[1] Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas.
Avenida Universidad 1001. Col. Chamilpa.
C.P. 62210. Cuernavaca, Morelos.

{ocotlandp, mcruz}@uaem.mx

10 de Junio de 2006

Resumen. El problema de transporte o VRP (Vehicle Routing Problem) consiste en determinar un conjunto de rutas minimizando el costo total de transportar paquetes de un origen a un destino, se ha tratado de disminuir ese costo por medio de la utilización de métodos de computación para calcular las rutas óptimas o cercanas a las óptimas. Implementar el problema VRP en casos reales es difícil por el gran número de restricciones que se deben considerar. En este documento hago el análisis del problema VRP destacando su entorno, complejidad, las variantes del problema VRP y sus posibles métodos de solución.

1 Introducción

El problema del transporte (Vehicle Routing Problem o VRP, por sus siglas en ingles), consiste en determinar un conjunto de rutas para una flota de vehículos que parten de uno o más depósitos o almacenes para satisfacer la demanda de varios clientes dispersos geográficamente [1]. El objetivo es entregar la demanda de dichos clientes minimizando el costo total involucrado en las rutas. El problema VRP es un problema muy conocido que se clasifica como un problema NP completo [2]. Por este motivo se recurre al empleo de métodos aproximados de manera que se pueda encontrar soluciones suficientemente buenas en un tiempo de computación razonable. El problema VRP aparece de forma natural en las áreas de transporte, distribución y logística [5], el transporte implica un gran costo asociado a los productos que se distribuyen pero realizando una buena planeación de distribución puede resultar un valor añadido. La utilización de métodos de computación para calcular las rutas óptimas o cercanas a las óptimas puede suponer ahorros de costos importantes (del orden de 5% al 20%, [2]).

2 Entorno del problema VRP

Dentro del entorno del problema VRP se encuentra la optimización combinatoria y la teoría de la complejidad. La optimización combinatoria estudia el modelado y solución algorítmica de problemas donde se busca maximizar o minimizar una función de varias variables definidas sobre un conjunto discreto [3][6]. Su área de aplicación es en la industria, logística y ciencia, ingeniería y administración de empresas, ruteo y carga de vehículos en redes de distribución, diseños de redes de telecomunicaciones, planificación de la producción, asignación de tripulación en líneas aéreas, planificación de la generación de la electricidad.

La teoría de la complejidad es parte de la teoría de la computación que estudia los recursos requeridos durante el cálculo para resolver un problema [2]. Los recursos comúnmente estudiados son: el tiempo (numero de pasos de ejecución de un algoritmo para resolver un problema), el espacio (cantidad de memoria utilizada para resolver un problema). Con base en el estudio de estos recursos la teoría de la complejidad establece una clasificación de problemas, como problemas P (polinomial), NP (Non-deterministic polinomial), NP completo, NP duro.

Clase P es el conjunto de todos los problemas de decisión que pueden ser resueltos por un algoritmo polinómico. Clase NP es el conjunto de todos los problemas de decisión que pueden ser resueltos por algoritmos no deterministas en tiempo polinómico. Clase NP completo tiene la propiedad de que si un problema dentro de esta clasificación puede ser resuelto en tiempo polinómico entonces todos los problemas NP pueden ser resueltos en tiempo polinómico. Clase NP duro si algún problema dentro de esta clasificación puede ser resuelto en tiempo polinómico entonces todos los problemas NP completos pueden ser resueltos en tiempo polinómico. La representación de esta clasificación se ve en la figura 1.

Fig. 1. Esta figura muestra la clasificación de los problemas NP e ilustra que el conjunto de problemas P y NP completos se encuentran dentro del conjunto de problemas NP.

El problema del transporte VRP se clasifica como un problema NP completo (esfuerzo por encontrar una solución óptima crece de manera exponencial con el tamaño del problema). Por el análisis de este entorno cabe mencionar la clasificación que se le da a VRP en las diferentes disciplinas, para optimización combinatoria VRP cae dentro de la clasificación de NP duro y para la teoría de la complejidad cae dentro de los problemas NP completos.

3 Definición del problema VRP

El problema VRP tiene sus orígenes en el año de 1959 propuesto por Dantzing y Ramser quienes originalmente le dieron el nombre de *trucking dispatching problem* [8]. El problema maneja conceptos de ruteo como lo hace el problema del agente viajero (Traveling Salesman Problem) y conceptos de almacenamiento de paquetes en contenedores (Bin Packing).

El problema VRP se define como: *la determinación de la ruta optima para una flota de vehículos que parten de uno o más depósitos (almacenes) para satisfacer la demanda de varios clientes dispersados geográficamente [5]*.

Las variables o parámetros involucrados en el problema son: visitas, depósitos, localizaciones geográficas, vehículos, capacidades y pesos. Las visitas son entregas o recolección de paquetes. El depósito es donde comienzan todas las rutas y donde terminan. Las localizaciones geográficas involucran: tiempo, distancia, origen y destino. Los vehículos son los que realizan los viajes (flota homogénea todos los vehículos son iguales o heterogénea todos los vehículos son diferentes). Las capacidades son las que se observan en el vehiculo como son: carga total, volumen total, número de las plataformas. Los pesos especifican el costo de recorrido entre las localizaciones geográficas.

3.1 Instancia del problema VRP

Una instancia del problema es la cantidad en número que se le da a cada parámetro del problema, por ejemplo una instancia para el problema VRP seria: 5 Visitas por ruta, 2 depósitos, localizaciones geográficas ubicadas a 30 minutos una de otra, 10 vehículos que conforman flota heterogénea, capacidades de 20 paquetes al menos por vehiculo, pesos que no sean mayores a 200.00 pesos entre localidad y localidad.

4 Variantes del problema VRP

Dependiendo de la instancia o parámetros del problema será la variante del problema VRP, existen variantes definidas para diferentes instancias como son:VRP con múltiples depósitos (MDVRP), VRP periódico (PVRP), VRP de entrega dividida (SDVRP), VRP estocástico (SVRP), VRP con recogidas y entregas (VRPPD), VRP con backhauls (VRPB), VRP con ventanas de tiempo (VRPTW) [7][8].

VRP con múltiples depósitos (MDVRP). Una empresa puede disponer de varios depósitos o almacenes desde los que suministra la demanda de sus clientes. Si los clientes están agrupados alrededor de los depósitos, entonces el problema puede verse como un conjunto de problemas independientes VRP. Pero si los clientes y los depósitos están mezclados, entonces se ha de resolver un problema MDVRP. Para resolver un problema MDVRP se necesita asignar los clientes a los depósitos. Para cada depósito se tiene una flota de vehículos. Cada vehículo que parte de un depósito, sirve a los clientes asignados a ese depósito y después regresa a dicho depósito.

El objetivo del problema es servir a todos los clientes minimizando el número de vehículos y la distancia total viajada.

VRP periódico (PVRP). En el problema VRP clásico, el periodo de planificación es un día. En el caso del problema PVRP, el periodo de planificación se extiende a M días. El objetivo es minimizar la flota de vehículos y el tiempo total de viaje. Un vehículo puede no regresar al depósito el mismo día de su partida. Durante el periodo de M días, cada cliente debe ser visitado al menos una vez.

VRP de entrega dividida (SDVRP). Se trata de un problema VRP en el que se permite que un cliente pueda ser atendido por varios vehículos si el coste total se reduce. Esto es importante si el tamaño de los pedidos de un cliente excede la capacidad de un vehículo. El objetivo es minimizar la flota de vehículos y el tiempo total de viaje.

VRP estocástico (SVRP). Se trata de un VRP en que uno o varios componentes son aleatorios. Por ejemplo: Clientes aleatorios. Un cliente aleatorio i, es un cliente que tiene una probabilidad p_i de estar presente y una probabilidad $1-p$ de estar ausente. Demandas estocásticas: la demanda del cliente i, d_i, tiene una determinada distribución de probabilidad. Tiempos estocásticos: el tiempo de servicio, t_i, y los tiempos de viaje t_{ij}, son variables aleatorias. Cuando algunos datos son aleatorios no es posible cumplir con todas las restricciones. Por tanto se puede llevar a cabo ciertas acciones correctivas cuando una restricción es violada.

VRP con recogidas y entregas (VRPPD). Es un VRP en que cabe la posibilidad de que los clientes pueden devolver determinados bienes. Por tanto, se debe tener presente que los bienes devueltos por los clientes caben en el vehículo. Esta restricción hace más difícil el problema de planificación y puede obligar a una mala utilización de las capacidades de los vehículos, un aumento de las distancias recorridas o a un mayor número de vehículos. Por todo lo dicho, se suelen considerar situaciones tales como que las entregas comienzan en un depósito y las recogidas se traen a la vuelta al depósito, de manera que no hay intercambio de bienes entre clientes. Otra alternativa es relajar la restricción de que todos los clientes deben ser visitados exactamente una vez. El objetivo es minimizar la flota de vehículos y el tiempo total de recorrido con la restricción de que el vehículo debe tener suficiente capacidad para transportar los bienes a entregar así como los recogidos para devolverlos al depósito.

VRP con backhauls (VRPB). El VRPB es un VRP en que los clientes pueden demandar o devolver artículos. Por tanto se necesita tener en cuenta que los bienes que los clientes devuelven caben en el vehículo. Pero además, se debe cumplir que todas las entregas se realizan antes de las recogidas. Esto se debe al hecho de que los vehículos se cargan por la parte trasera y que la recolocación de la carga en los vehículos se considera antieconómica o no factible. Las cantidades demandadas y las recogidas se conocen de antemano. El VRPB es similar al VRPPD con la restricción de que en el caso del VRPB todas las entregas de una ruta se deben completan antes de las recogidas. El objetivo es encontrar un conjunto de rutas que minimiza la distancia total recorrida.

VRP con ventanas de tiempo (VRPTW) Es un VRP con la restricción adicional de que se asocia una ventana de tiempo con cada cliente. Al cliente *i*, se le asocia la ventana de tiempo [8]. Si un vehículo llega al cliente antes del instante e_i el vehículo espera hasta ese instante para atender al cliente. Si llega en el intervalo del a ventana de tiempo, el vehículo suministra la demanda en el momento de la llegada y finalmente si el vehículo llega con posterioridad a *li* entonces el cliente queda sin atender. El objetivo es minimizar la flota de vehículos, el tiempo total de viaje así como el tiempo total de espera al suministro de los clientes.

5 Técnicas de solución al problema VRP

La solución para el problema VRP puede ser dependiendo de la instancia con técnicas exactas, heurísticas y meta heurísticas.

Dentro de las aproximaciones exactas encontramos: ramificación y acotamiento (hasta 100 nodos), ramificación y corte, programación dinámica, programación lineal entera. Dentro de las heurísticas encontramos: los métodos de construcción, el algoritmo de 2 fases, (que dividen a VRP en dos etapas: la de asignación de clientes a vehículos y la de determinación del orden de visita a dichos clientes) y el algoritmo de mejora iterativa (toma como entrada una solución de otra heurística). Dentro de los Meta heurísticos encontramos: a los algoritmos de colonia de hormigas, programación restringida, recocido simulado, algoritmos genéticos, búsqueda tabú y redes neuronales entre otros. Dependiendo de las condiciones del problema es el método a utilizar. Para instancias pequeñas podemos formularlo como modelo de PLE (programación lineal entera), para instancias mayores es necesario modelarlo de manera general como un grafo [8].

6 Modelos del problema VRP

Para generar un modelo matemático del problema VRP es necesario realizar un planteamiento del problema, un análisis, definir los parámetros y proponer la solución. El objetivo de la solución es minimizar costos de transportación. Como esta implicada una minimización, se puede realizar el planteamiento por medio de Programación lineal (PL) [4], utilizando el método Simplex (en base a la instancia). Para instancias grandes no es posible modelar con método exacto por lo que se buscan heurísticas para poder dar solución al problema. En las secciones siguientes se describe un modelo exacto y un modelo de grafos.

6.1 Modelo de programación lineal para VRP

El planteamiento para un método exacto es mediante un modelo de programación lineal [1]: definamos al origen como *i*, (*i*=1,2,3,...*m*) y *Si* el número de unidades disponibles para distribuir a los destinos. Por otra parte definamos a los destino como *j*, (*j* =1,2,3...*n*), con demanda *dj* unidades que recibe desde los orígenes, por último el costo implicado en la transportación de origen *i* al destino *j* como *Cij* que representará el costo por unidad distribuida. Ordenando todas estas consideraciones y realizando la equivalencia a los requerimientos de la PL tenemos: a *Z* como el costo total de distribución, *Xij* (*i*=1,2,3,...*m*; *j*=1,2,3,...*n*) el número de unidades que se distribuyen del origen *i* al destino *j*. De tal forma tenemos:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, x_{ij} \quad . \tag{1}$$

Sujeta a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = s_i \qquad \text{para } i=1,2,3\ldots\text{m} \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad \text{para } j=1,2,3\ldots\text{n} \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{para toda } i \text{ y } j \, . \tag{4}$$

La tabla siguiente de costos y requerimientos, representa el costo por unidad distribuida.

Tabla 1. Los origenes varian de *i* a *m*, los destinos varian de *j* a *n*, los recursos *S* varian de *i* a *m* y la demanda que varia de *j* a *n*.

		Destino	Recursos
	1	c_{11} c_{12} … c_{1n}	*S1*
	2	c_{21} c_{22} … c_{2n}	*S2*
	.	.	.
Origen	.	.	.
	.	.	.
	m	c_{m1} c_{m2} … c_{mn}	*Sm*
Demanda		d_1 d_2 … d_m	

En el planteamiento del problema es fácilmente aplicable el método simplex en forma tabular. Sin embargo hay que tener presente que el método simplex normal como lo aplicaríamos a un sistema de ecuaciones no lo podemos aplicar directamente al problema VRP es necesario considerar algunas modificaciones al método como se explica en la sección 6.1.1.

6.1.1 Método simplex para el problema del transporte

El problema de transporte para una instancia pequeña es un tipo especial de problemas de programación lineal y puede resolverse aplicando el método simplex, sin embargo es necesario considerar que las cantidades de abastecimiento o recursos *Si* y demanda *di* tienen valores enteros, por lo que deberá cumplir la propiedad de soluciones enteras es decir, para los problemas de transporte en los que *Si* y *dj* tiene un valor entero, todas las variables básicas tiene también valores enteros [1]. Para tener una solución optima de cualquier tipo, un modelo de transporte debe tener soluciones factibles, para lo cual debe cumplir con la siguiente condición:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} d_j \ . \tag{5}$$

La tabla para el método simplex debe tener la siguiente modificación para el problema de transporte. En el renglón 0 se deben aplicar las fórmulas que se muestran en la tabla 2.

Tabla 2. El planteamiento modificado para el problema VRP con método simplex.

	Ecuación número	Z	…*xij* …	*zi* …	*zm+j*…	Lado derecho
Z	0	1	*Cij-ui-vj*	*M-ui*	*M-vj*	$-\sum_{i=1}^{m} S_i u_i - \sum_{j=1}^{n} d_j v_j$

6.1.2 Ventajas método simplex para el problema del transporte contra método simplex tabular

Las ventajas del método simplex para el problema de transporte con el método simplex tabular son que el primero: no necesita variables artificiales (pues se dispone de un procedimiento sencillo y conveniente para construir una solución inicial básica factible), que el renglón 0 actual se puede obtener sin usar ningún otro renglón (con solo calcular los valores de u_i y v_j directamente, como cada variable básica debe tener coeficiente cero en el renglón 0, estos renglones se pueden obtener resolviendo el sistema de ecuaciones: c_{ij}-u_i-v_j=0 para cada i y j tal que x_{ij} es variable básica), que la variable básica que sale se puede identificar de manera sencilla sin usar los coeficientes de la variable básica entrante. La gran conclusión es que se puede eliminar casi toda la tabla simplex [1][9].

Además de los datos de entrada, lo único que necesita el método simplex de transporte es la solución básica factible actual, los valores actuales de u_i, y v_j y los valores resultantes de (c_{ij}-u_i-v_j) para las variable x_{ij} no básicas.

6.2 Modelo general para VRP

El modelo general de VRP, se realiza a través de un grafo denotado como G(V,E) V={v_0 v_1 ,…, v_n} es el conjunto de vértices del grafo, donde v_0 corresponde al almacén y V' es el conjunto de los n clientes, es decir V'=V/{v_0} [10].

A es el conjunto de arcos del grafo representado como:

$$A = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V \cap i \neq j\} . \tag{6}$$

C es la matriz de distancias o costos c_{ij} entre los clientes v_i y v_j, d es un vector de demandas de los clientes, R_i es la ruta para el vehiculo i, m es el número de vehículos (una ruta es asignada a cada vehiculo), f_i es el costo fijo de utilización del vehiculo i. Cuando

$$c_{ij} = c_{ij} \forall (v_i, v_j) \in A . \tag{7}$$

se dice que el problema es simétrico y es entonces que se reemplaza el conjunto A por el conjunto E, definido como:

$$E = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V \cap i < j\} . \tag{8}$$

Además del tiempo de recorrido, debe considerarse un tiempo de servicio.

$$\delta_i . \tag{9}$$

Requerido por un vehiculo para descargar las mercancías *di* en *vi*. Es necesario que la duración total de la ruta no sobrepase un límite dado *D*. Una solución factible *S* para problemas de este tipo puede ser compuesta de dos elementos: una partición *R1,…,Rm* de V y una permutación σi de R_1Uv_0 especificando el orden de los clientes en la ruta *i*. Por ejemplo una solución factible para un problema de 15 clientes podría ser una partición de tres rutas.

$$R_1 = \{v_2, v_7, v_{12}, v_{15}\} . \tag{10}$$

$$R_2 = \{v_1, v_3, v_9, v_{10}, v_{14}\} . \tag{11}$$

$$R_3 = \{v_4, v_5, v_6, v_8, v_{11}, v_{13}\}\,. \tag{12}$$

Con permutaciones de la siguiente forma:

$$\sigma_1 = \{v_0, v_{12}, v_2, v_7, v_{15}, v_0\}\,. \tag{13}$$

$$\sigma_2 = \{v_0, v_{10}, v_9, v_{14}, v_3, v_1, v_0\}\,. \tag{14}$$

$$\sigma_3 = \{v_0, v_8, v_{11}, v_6, v_{13}, v_5, v_4, v_0\}\,. \tag{15}$$

El costo de una ruta dada

$$R_i = \{v_0, v_1, ..., v_{n_i+1}\}\,. \tag{16}$$

Donde

$$v_0 = v_{n_i+1}\,. \tag{17}$$

Esta definido por la función

$$C(R_i) = \sum_{j=0}^{n_i} c_{j,j+1} + \sum_{j=1}^{n_i} C(\delta_i) + f_i\,. \tag{18}$$

Una ruta *Ri* es factible si el vehiculo se detiene exactamente una vez en cada uno de los clientes que le corresponden y el tiempo total de la ruta *t(Ri)* no excede un limite preespecificado *D:t(Ri)<=D.*

Finalmente el costo de la solución *S* al problema corresponde a la función de costo total.

$$FCT_{VRP}(s) = \sum_{i=1}^{m} C(R_i)\,. \tag{19}$$

Conclusiones

El problema VRP por teoría de la complejidad esta clasificado como NP completo, en optimización combinatoria se le clasifica dentro de los problemas NP duros. Dependiendo del tamaño de la instancia, será el método de solución. Para instancias no muy grandes se puede resolver VRP con métodos exactos, para instancias mayores se deben aplicar heurísticas. Existen variantes en base a las condiciones del problema, que se pueden aplicar dependiendo del comportamiento. Cuando se aplican conceptos del problema VRP para problemas reales, es difícil encontrar un modelo y una técnica que de solución debido a que el problema VRP maneja varias restricciones. Los modelos analizados en este artículo no son los únicos para poder dar solución al problema VRP. Como se mencionó en este documento podemos hacer hibridaciones entre técnicas de solución generando nuevas soluciones o diseñar una propia que se apegue al problema VRP real.

Referencias

1. Hillier, F. S., Lieberman, G. J.: Introducción a la investigación de operaciones. Editorial McGraw-Hill.5ª ed. (1994)
2. Garey, M. R., Johnson, D.S.: Computers and intractability, A Guide to the theory of NP-Completeness. W.H.Freeman and Company, New York. USA.ed. (2003)
3. Papadimitriou, C.H., Steiglitz, K.: Combinatorial optimization, algorithms and complexity. Dover Publications, Inc. Mineola, New York. USA ed. (1998)
4. The Vehicle Routing Problem. Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Society of Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia. USA.(2001)
5. Dantzig, G. B. and Ramser. R.H.: The Truck Dispatching Problem. Management Science 6, (1959) 80–91.
6. Ausiello, G., Crescenzi, P., Gambosi, G., Kann, V., Marchetti-Spaccamela, A., Protasi, M.: Complexity and approximation: Combinatorial optimization problems and their aproximability properties. Springer-Verlag.(1999)
7. Aronson, L.D.:Algorithms for vehicle routing – A survey. Technical Report 96-21. Faculty of Mathematics and Informatics Delft University of Technology. (1996)
8. Corona, J.A.: Hiperheuristicas a través de programación genética para la resolución de problemas de ruteo de vehículos. Tecnológico de Monterrey. ed. Monterrey, Mexico (2005)
9. Machado, J. Tavares, F.B. Pereira, and Costa, E.:Vehicle routing problem: Doing in the evolutionary way, in proceedings of the evolutionary computation conference (GECCO 2002). New York, USA. 9-13 July. (2002) 690
10. Bertsimas, D.J., Simchi, L.D.:A new generation of vehicle routing research. Operation research. Vol. 44. Issue 2. ISSN:0030-364X. (1996) 286