Martes, 07 de diciembre de 1999.

TIEMPO DE TERMINO TOTAL SIN PREEMPTIONS.

PRESENTA: Marco Antonio Cruz Chávez.

Algoritmo de solución para el modelo de scheduling
(Determínistico)

$$Rm \mid \mid \Sigma C_j$$

Solución a un sistema en el que se tienen m máquinas no relacionadas, n tareas sin restricción alguna, se permiten demoras y el objetivo es el de minimizar el tiempo de terminación total de las tareas.

Se cumple que

$$Cil = Cij + pil, \qquad \text{para cada par } j, l \quad \text{tal que } j \prec l,$$

En general cuando la tarea j es procesada en la máquina i y a continuación le siguen k-1 tareas, la tarea j contribuirá kp_{ij} en la función objetivo. Donde k es la posición que tiene la tarea en la máquina para ser ejecutada.

Formulación entera del problema.

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} k \; pij \; Xikj$$

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} Xikj = 1,$ $\qquad j = 1,\ldots, n$

(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} Xikj \le 1,$ $\qquad i = 1,\ldots,m, \quad k = 1,\ldots,n$

(3) $Xikj \in \{0,1\},$ $\qquad i = 1,\ldots,m, \quad k = 1,\ldots,n$

Xikj = 1 si el trabajo j es asignado en la k-esima posición sobre la máquina i y cero de otra forma.

(1) Cada trabajo se asigna solo una vez

(2) Cada posición en cada máquina se toma a lo mas una vez (puede existir demora).

(3) Las restricciones de integridad en este tipo de problemas no requieren que sean explicitas.

Para esta formulación la teoría de flujo de redes dice que las restricciones en 3 se pueden reemplazar por restricciones no negativas y así obtener una formulación lineal ya que esta es la misma que el problema del transporte:

Problema del transporte.

Considerar m puntos de origen localizados en un mapa, donde el origen i tiene una provisión (oferta) de a_i unidades de un cierto articulo. Además, están localizados n puntos de destino, en donde el destino j requiere (demanda) de b_i unidades del producto. Asociado con cada ligadura o arco (i,j), del origen i al destino j, se tiene un costo unitario c_{ij} por transporte. El objetivo es determinar el patrón de embarques factible de los orígenes a los destinos que minimice el costo total del transporte.

El modelo de programación lineal para el problema del transporte es:

Minimizar

C11X11+ …+ C1nX1n +C21X21+…+C2nX2n+…+Cm1Xm1+…+CmnXmn

s.a.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
X11 & +\cdots+ & X1n & & & & & & & = & a1 \\
 & & & X21 & +\cdots & +X2n & & & & = & a2 \\
 & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\
 & & & & & & & Xm1 & +\cdots & +Xmn & = & am \\
X11 & & & +X21 & & & \cdots & +Xm1 & & & = & b1 \\
 & \ddots & & & \ddots & & & & \ddots & & & \\
 & & X1n & & & +X2n & & \vdots & & +Xmn & = & bn \\
X11, & \cdots, & X1n, & X21, & \cdots, & X2n, & \cdots, & Xm1, & \cdots, & Xmn & \geq & 0
\end{array}
$$

Reorganizando la función objetivo de nuestro problema se puede obtener el mismo sistema.

$$\text{Minimizar} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} k \; pij \; Xikj$$

Dada las características de la matriz obtenida y considerando que todos los términos del sistema son enteros y en la matriz los coeficientes con valor son uno, se puede asegurar que el resultado en X será cero o la unidad por lo siguiente **[Bazaraa]**:

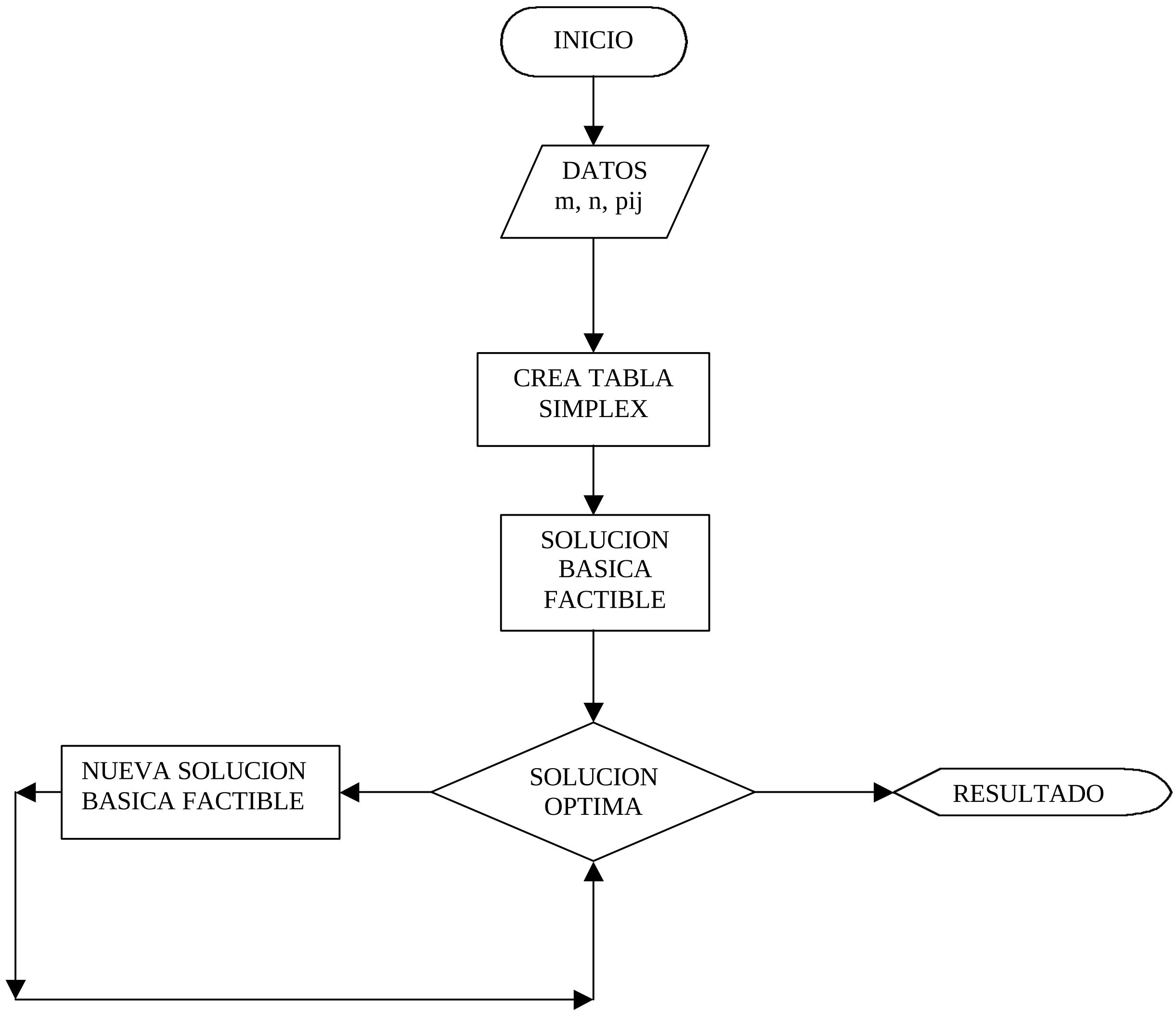
1. Cada componente X esta acotada como sigue: $0 \le Xij \le Minimo\{ai, bj\}$

2. La matriz tiene unimodularidad. El determinante de cualquier submatriz cuadrada es –1, 0 o 1.

3. Posee triangularidad. Toda submatriz posee triangularidad (para ver esto se tienen que realizar permutaciones en renglones y columnas).

4. Como cada submatriz consiste completamente de componentes enteras y es triangular con todos los elementos diagonales a 1, se concluye que todas las variables básicas serán enteras.

ALGORITMO.



Algoritmo aplicado para la solución del modelo de scheduling (determinístico)

$$Rm \mid \mid \Sigma C_j$$

EJEMPLOS DE PROBLEMAS.

Ejemplo 1: Encontrar el tiempo total de terminación en un sistema de 2 máquina y 3 tareas, cuyos tiempos de procesamiento se especifican a continuación [Pinedo].

Tareas	1	2	3
P1j	4	5	3
P2j	8	9	3

Ejemplo 2. Problema con 3 máquinas y 10 tareas.

TAREAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M1	1	13	2	17	3	18	19	25	26	30
M2	4	14	5	21	6	20	31	32	27	37
M3	7	15	8	22	9	24	33	34	28	38

Mínimo tiempo total de terminación: 276.00

Tareas y posición asignada en las máquinas.

X232 X218 X143 X135 X319 X1110 X127 X151 X226 X324

MÁQUINAS	TAREAS				
M1	1	3	5	7	10
M2	2	6	8		
M3	4	9			

[5(1)+4(2)+3(3)+2(19)+1(30)] + [3(14)+2(20)+1(32)] + [2(22)+1(28)] = 276

SALIDA DEL PROGRAMA AL PROBLEMA 1.

TABLA INICIAL.

Basic	Z	X111	X121	X131	X211	X221	X231	X112	X122	X132	X212	X222	X232	X113	X123	X133	X213	X223	X233	A1	A2	A3	S1	S2	S3	S4	S5	S6	
Z	1	4	8	12	8	16	24	5	10	15	9	18	27	3	6	9	3	6	9	1000	1000	1000	0	0	0	0	0	0	0
A1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
A2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
A3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
S1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
S2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
S3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
S4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
S5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
S6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

ARREGLO A ELIMINACION GAUSSIANA.

Basic	Z	X111	X121	X131	X211	X221	X231	X112	X122	X132	X212	X222	X232	X113	X123	X133	X213	X223	X233	A1	A2	A3	S1	S2	S3	S4	S5	S6	
Z	1	-996	-992	-988	-992	-984	-976	-995	-990	-985	-991	-982	-973	-997	-994	-991	-997	-994	-991	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3000
A1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
A2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
A3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
S1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
S2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
S3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
S4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
S5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
S6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

ITERACION TABLA.

Basic	Z	X111	X121	X131	X211	X221	X231	X112	X122	X132	X212	X222	X232	X113	X123	X133	X213	X223	X233	A1	A2	A3	S1	S2	S3	S4	S5	S6	
Z	1	-996	-992	-988	-992	-984	-976	-995	-990	-985	-991	-982	-973	0	3	6	0	3	6	0	0	997	0	0	0	0	0	0	-2003
A1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
A2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
X113	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
S1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
S2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
S3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
S4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
S5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
S6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

ITERACION TABLA.

Basic	Z	X111	X121	X131	X211	X221	X231	X112	X122	X132	X212	X222	X232	X113	X123	X133	X213	X223	X233	A1	A2	A3	S1	S2	S3	S4	S5	S6	
Z	1	0	-992	-988	-992	-984	-976	1	-990	-985	-991	-982	-973	0	-993	-990	-996	-993	-990	0	0	1	996	0	0	0	0	0	-2003
A1	0	0	1	1	1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	-1	0	0	0	0	0	1
A2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
X113	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
X111	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
S2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
S3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
S4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
S5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
S6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

ITERACION TABLA.

Basic	Z	X111	X121	X131	X211	X221	X231	X112	X122	X132	X212	X222	X232	X113	X123	X133	X213	X223	X233	A1	A2	A3	S1	S2	S3	S4	S5	S6	
Z	1	0	4	8	4	12	20	-995	-990	-985	-991	-982	-973	0	3	6	0	3	6	996	0	997	0	0	0	0	0	0	-1007
X213	0	0	1	1	1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	-1	0	0	0	0	0	1
A2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
X113	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
X111	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
S2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
S3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
S4	0	0	-1	-1	0	-1	-1	1	0	0	1	0	0	0	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-1	1	0	0	1	0	0	0
S5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
S6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

ITERACION TABLA.

Basic	Z	X111	X121	X131	X211	X221	X231	X112	X122	X132	X212	X222	X232	X113	X123	X133	X213	X223	X233	A1	A2	A3	S1	S2	S3	S4	S5	S6	
Z	1	0	-991	-987	-991	-983	-975	0	-990	-985	-991	-982	-973	995	3	6	0	3	6	1	0	997	995	0	0	0	0	0	-1007
X213	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
A2	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	-1	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	0	0	0	0	0	1
X112	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
X111	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
S2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
S3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
S4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	-1	-1	0	-1	-1	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0
S5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
S6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

ITERACION TABLA.

Basic	Z	X111	X121	X131	X211	X221	X231	X112	X122	X132	X212	X222	X232	X113	X123	X133	X213	X223	X233	A1	A2	A3	S1	S2	S3	S4	S5	S6	
Z	1	0	0	4	0	8	16	0	1	6	0	9	18	4	3	6	0	3	6	992	991	997	4	0	0	0	0	0	-16
X213	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
X121	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	-1	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	0	0	0	0	0	1
X112	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
X111	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0
S2	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	1	1	0	0	0	0	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0	0
S3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
S4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	-1	-1	0	-1	-1	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0
S5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
S6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Tiempo total de terminaci¢n: 16.00

Tareas y posici¢n asignada en las m quinas.

X213 X121 X112

El espacio de memoria aproximado requerido en el programa, depende del número de máquinas y tareas en el sistema

MÁQUINAS	2	3	4
TAREAS	10	10	10
MEMORIA RAM	57 KB	113 KB	4 MB

Complejidad del algoritmo presentado para la solución del modelo Rm | | C_j:

En tiempo presenta una complejidad exponencial de acuerdo al tamaño de la entrada.

En memoria la complejidad es polinomial. El algoritmo necesita exactamente

$m^2n^3 + 2mn^3 + m^2n^2 + mn^2 + n^2$

unidades de memoria para datos de entrada de tamaño mn, por lo que el espacio requerido por dicho algoritmo es $O(m^2n^3)$

m = número de máquinas.
n = número de tareas.

Existe un algoritmo acotado en tiempo polinomial en función del tamaño del problema (puntos interiores).

Algoritmo simplex desarrollado por George Dantzig en 1947.

Ventaja.

- Converge a soluciones optimas. (problemas de cerca de 5000 restricciones funcionales y 10000 variables).
- Muchos problemas prácticos se pueden resolver por este método.
- La densidad de la tabla de coeficientes de restricciones (proporción de coeficientes distintos de cero).

Desventaja.

- Algoritmo de tiempo exponencial.

Algoritmo de puntos interiores desarrollado por Karmarkar Narendra en 1984.

Ventajas.

- Algoritmo de tiempo polinomial
- Soluciones más rápidas a problemas muy grandes (50 veces más rápido que el simplex)

Desventajas.

- Para problemas pequeños no es bueno puesto que requiere de un alto tiempo de preparación para comenzar a ejecutarse.
- Converge a una solución cercana a la optima.

Recomendaciones: Para solucionar problemas grandes se podría utilizar en un primer paso el algoritmo de Karmarkar para obtener una solución optima aproximada y en un segundo paso utilizar esta solución como una básica factible inicial para la utilización de simplex obteniendo mas pronto una solución optima.

REFERENCIAS.

[Pinedo]	**M. Pinedo, Scheduling Theory, Algorithms, and Systems, Prentice Hall, U.S.A., 1995.**
[Johnsonbaugh]	**R. Johnsonbaugh, Matematicas Discretas, Iberoamericana, Mexico, D. F., 1988.**
[QSB+]	**Software QSB+, Systems for Business Plus, Ver. 2.0, Prentice-Hall, 1991.**
[Hiller]	**F. S. Hiller y G. J. Lieberman, Introducción a la investigación de operaciones, McGraw-Hill, México D.F., 1994.**
[Bazaraa]	**M.S. Bazaraa y J.J.Jarvis., Programación lineal y flujo en redes, 2ª Edición, Limusa, México D.F.,1998.**