

CAPITULO 2

APLICACION DE LA TECNICA NUMERICA DE DIFERENCIAS FINITAS INTEGRADAS (DFI) AL SISTEMA DE ECUACIONES GOBERNANTES.

2.1. - Generalidades

McNeal en 1953, es, aparentemente, el primero en utilizar la técnica de Diferencias Finitas Integradas (DFI). El clasifica esta aproximación como "una red asimétrica de diferencias finitas", hace uso de esta técnica en la solución de problemas con valores de frontera de segundo orden. Poco tiempo después, el método DFI fue usado para la obtención de resultados en problemas que involucran transferencia de calor. Edwards en 1972, usó esa técnica en el desarrollo de un algoritmo llamado Trump, que maneja estados estables y transitorios de distribución de temperaturas, con transferencia de calor conductiva y convectiva. La transferencia de calor conductiva es conceptualmente similar al flujo de fluidos en medios porosos y el análisis numérico de este tipo de problemas con geometría compleja, se facilita enormemente por el uso de una formulación integral (también aplicada en el método del elemento finito).

Pruess y Schroeder en 1980 utilizaron la técnica DFI para el desarrollo del simulador SHAFT 79 [Pruess y Schroeder, 1980], el cual involucra un transporte simultáneo de fluido y calor.

El método DFI es una técnica numérica muy poderosa que se aplica en la solución de problemas que involucran flujo de agua subterránea a través de un medio poroso. Este método combina las ventajas de una formulación integral con la simplicidad de la técnica de diferencias finitas, siendo muy útil para el manejo de sistemas heterogéneos multidimensionales.

En la presente tesis se usa esta formulación integral (DFI) la cual ha sido empleada de forma exitosa en la solución de problemas de transferencia de calor y que muestra una descripción geométrica flexible debido a que no se hace distinción entre una, dos o tres dimensiones, de geometrías regulares o irregulares.

2.2.- Aplicación de la técnica DFI a la ecuación del transporte de masa.

El primer paso de la técnica DFI consiste en discretizar en subregiones (elementos de volumen) el volumen total del sistema físico para posteriormente integrar la ecuación sobre

cada elemento de volumen [Narasimhan y Witherspoon, 1989; Suarez y De la Torre, 1991]. La ecuación (1.1) se expresa entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_n} M dV_n = - \int_{V_n} \text{div} \underline{F} dV_n + \int_{V_n} q dV_n \quad (2.1)$$

Donde $M = \phi \rho$ y el subíndice n indica cada uno de los elementos que componen el volumen total. Aplicando el teorema de la divergencia al primer término sobre el lado derecho de (2.1) para convertirlo a una integral de superficie tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_n} M dV_n = - \int_{\Gamma_n} \underline{F} \cdot \underline{n} d\Gamma_n + \int_{V_n} q dV_n \quad (2.2)$$

aquí \underline{n} es el vector normal a la superficie Γ_n que representa la frontera que contiene o delimita al elemento volumétrico V_n . Cada Γ_n puede subdividirse en M_i intercaras de área A , por lo que la integral de superficie total será la suma de integrales sobre las M_i intercaras

$$\int_{\Gamma_n} \underline{F} \cdot \underline{n} d\Gamma_n = \sum_{m=1}^{M_i} \int_{A_{nm}} \underline{F} \cdot \underline{n} dA_{nm}$$

Subsiguientemente, por aplicación del teorema del valor medio [Haaser et al., 1970], se introducen promedios volumétricos apropiados, siendo esto la idea central de la técnica DFI:

$$\frac{d}{dt} (M_n V_n) = - \sum_m A_{nm} F_{nm} + q_n V_n \quad (2.3)$$

ecuación válida en cada volumen arbitrario V_n . M_n es el valor promedio de M sobre V_n . La integral de superficie expresa una suma discreta de valores de los flujos normales atravesando los segmentos de superficie A_{nm} correspondientes.

Discretizando el tiempo de forma completamente implícita (para poder manejar intervalos largos de Δt) como una diferencia finita de primer orden, se puede observar en (2.4) que el flujo y la fuente/sumidero están evaluados en el nivel de tiempo actual:

$$M_n^{k+1} - M_n^k = \frac{t^{k+1} - t^k}{V_n} \left[- \sum_m A_{nm} F_{nm} + q_n V_n \right]^{k+1} \quad (2.4)$$

La masa para el paso de tiempo $k+1$ es :

$$M_n^{k+1} = \phi_n^{k+1} \rho_n^{k+1} \quad (2.5)$$

La masa para el paso de tiempo k es :

$$M_n^k = \phi_n^k \rho_n^k \quad (2.6)$$

n y m son etiquetas para los elementos de volumen, y k es la etiqueta del paso de tiempo. Ordenando (2.4), se tiene la ecuación del Transporte de Masa discretizada por la técnica DFI:

$$D_n(\underline{X}^{k+1}) \equiv M_n^{k+1} - M_n^k - \frac{\Delta t}{V_n} \left[- \sum_m A_{nm} F_{nm}^{k+1} + V_n q_n^{k+1} \right] = 0 \quad (2.7)$$

Donde, de (1.5) se tiene que:

$$F_{nm} = - \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\rho_{\alpha}^k k_{\alpha}}{\mu_{\alpha}} \right)_{nm} \left[\frac{P_m - P_n}{d_{nm}} - (\rho_{\alpha})_{nm} g_{nm} \right] \quad (2.8)$$

donde los subíndices (nm) denotan valores en la intercara (nm) basados en los valores medios de los parámetros en cada uno de los elementos de volumen que conforman la intercara. Esto requiere distintos procedimientos para parámetros diferentes como por ejemplo, interpolación espacial, factor de peso, etc. En esta tesis se empleará el método de Lagrange para el cálculo de las propiedades termofísicas en la intercara (capítulo 3). La ecuación (2.8) representa el flujo de masa del elemento m hacia el elemento n , a través de su intercara de área A_{nm} . d_{nm} es la distancia entre los nodos de elementos ubicados en el centro de los mismos. g_{nm} es el componente de aceleración gravitacional en la dirección de m hacia n .

2.3.- Aplicación de la técnica DFI a la ecuación del transporte de energía

Similarmente al procedimiento anterior, para la ecuación de Transporte de Energía, podemos integrar espacialmente (1.6) en una pequeña subregión finita de volumen V de la región de flujo y obtener la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_n} U dV_n = - \int_{V_n} \text{div} \underline{G} dV_n + \int_{V_n} Q dV_n \quad (2.9)$$

Donde U se define por (1.8). Aplicando el teorema de la divergencia al primer término sobre el lado derecho de (2.9) para convertirlo a una integral de superficie, y asumiendo que U es un valor promedio sobre V :

$$\frac{\partial U}{\partial t} \int_{V_n} dV_n = - \int_{\Gamma_n} \underline{G} \cdot \underline{n} d\Gamma_n + \int_{V_n} Q dV_n \quad (2.10)$$

aquí n es el vector normal a la superficie. Para discretizar el dominio total del flujo se introducen en (2.10) promedios volumétricos apropiados para obtener pequeños subdominios o elementos y poder evaluar el balance de masa en cada elemento:

$$\frac{d}{dt} (U_n V_n) = - \sum_m A_{nm} G_{nm} + Q_n V_n \quad (2.11)$$

Se procede a discretizar el tiempo de forma completamente implícita como una diferencia finita de primer orden. Nótese que el flujo y la fuente/sumidero están evaluados en el nivel de tiempo actual:

$$U_n^{k+1} - U_n^k = \frac{t^{k+1} - t^k}{V_n} \left[- \sum_m A_{nm} G_{nm} + Q_n V_n \right]^{k+1} \quad (2.12)$$

La energía interna volumétrica para el paso de tiempo $k+1$ es:

$$U_n^{k+1} = \phi_n^{k+1} \rho_n^{k+1} u_n^{k+1} + (1 - \phi_n) \rho_R C_R T_n^{k+1} \quad (2.13)$$

La energía interna volumétrica para el paso de tiempo k es:

$$U_n^k = \phi_n^k \rho_n^k u_n^k + (1 - \phi_n) \rho_R C_R T_n^k \quad (2.14)$$

Ordenando (2.12), se tiene la representación del Transporte de Energía en la ecuación (2.15), discretizada por la técnica DFI:

$$E_n(\underline{X}^{k+1}) \equiv U_n^{k+1} - U_n^k - \frac{\Delta t}{V_n} \left[- \sum_m A_{nm} G_{nm}^{k+1} + V_n Q_n^{k+1} \right] = 0 \quad (2.15)$$

El flujo de energía a partir de (1.7), es:

$$G_{nm} = -K_{nm} \left[\frac{T_m - T_n}{d_{nm}} \right] + \sum_{\alpha=1}^2 h_{\alpha nm} F_{\alpha nm} \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16) representa el flujo de energía del elemento m hacia el elemento n , a través de una intercara de área A_{nm} , bajo una distancia d_{nm} (ver figura 2-1).

Para (2.7) y (2.15), Δt es el paso de tiempo, V_n es el volumen del elemento n , $\underline{X}^{k+1} = (\rho_1^{k+1}, \dots, \rho_N^{k+1}, u_1^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})$ es el vector de $2N$ incógnitas para un sistema con N elementos en el nivel de tiempo t^{k+1} . Es requisito indispensable para este tipo de problemas el poder manejar etapas de tiempo demasiado grandes. Para esto y para poder tener una buena estabilidad numérica, los términos de flujo son expresados en forma de parámetros termodinámicos desconocidos en el tiempo $k+1$ de forma implícita.

Las propiedades físicas en las intercaras de los elementos se calcularán en base a una interpolación lineal por el método de Lagrange.

2.4.- Manejo de la geometría del yacimiento geotérmico por el método DFI.

La discretización en el espacio de (2.7) y (2.15) por la técnica DFI involucra una conformación de bloques poliédricos, volúmenes, áreas de intercara y distancias nodales. Aquí no se tiene referencia absoluta a ningún sistema global de coordenadas lo que implica que las ecuaciones discretizadas son válidas para geometrías irregulares y arbitrarias en una, dos o tres dimensiones.

En la figura 2-1, el término d_{nm} contenido en (2.8) y (2.16) denota la distancia entre los puntos nodales n y m de cada elemento (ejemplo, distancia desde el nodo \mathbf{n} al nodo \mathbf{m}), en forma perpendicular a la intercara.

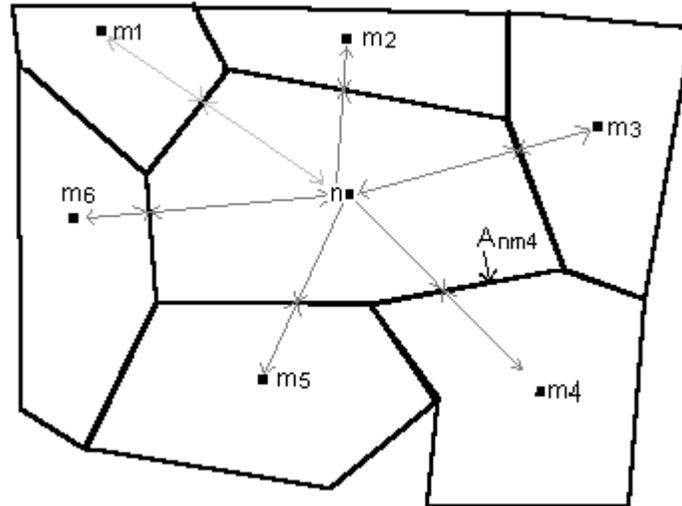


Figura 2-1. Se muestran las distancias d_{nm} desde la intercara del elemento (n) hacia los demás elementos, y de estos al elemento (n).

En el método DFI la forma de manejar la geometría del sistema se muestra en la figura 2-1. Tómese como elemento principal a n y cada elemento m : m_1 , m_2 , m_3 , m_4 , m_5 , m_6 según la intercara a considerar. De aquí, el área de la intercara entre los elementos n y m_4 es la denotada con A_{nm4} y es perpendicular a la dirección del flujo F_{nm4} . La distancia entre los nodos respectivos es d_{nm4} . Es necesario que los volúmenes de los elementos empleados en DFI sean figuras poliédricas (triángulos, rectángulos, cubos, trapecios, etc.), simplemente conexas, para satisfacer las condiciones del teorema del valor medio para integrales.