

CAPITULO 1

ECUACIONES GOBERNANTES DEL TRANSPORTE DE MASA Y ENERGIA EN LOS YACIMIENTOS GEOTERMICOS

1.1.- Ecuaciones para el transporte de masa y energía

Para poder obtener un modelo matemático acerca del comportamiento físico de un sistema, se requiere conocer el conjunto de ecuaciones y las condiciones iniciales y de frontera que rigen los fenómenos físicos involucrados. Una vez realizado esto, se procede a resolver el conjunto de ecuaciones por medio de técnicas numéricas (en la mayoría de los casos) conformando el simulador numérico del sistema físico bajo estudio. Mediante el simulador numérico es posible reproducir diversos comportamientos físicos del sistema y definir así las condiciones óptimas de su desempeño. En la investigación de yacimientos geotérmicos ha resultado de gran utilidad el poder simular las condiciones físicas reinantes lo que ha permitido obtener grandes avances en el conocimiento de estas áreas, pudiendo establecer las condiciones óptimas para la explotación de los yacimientos. El tipo de información que se puede obtener mediante la simulación de estos sistemas [Samaniego y Arellano, 1987] se lista a continuación:

1. El efecto que ocasiona la ubicación y espaciamiento de los pozos productores.
2. Efecto de los pozos en la extracción de energía.
3. Capacidad de producción del yacimiento.
4. Localización más adecuada de los pozos inyectoros.
5. Efecto de los gases condensables sobre la producción de los yacimientos.

En este capítulo se plantean las ecuaciones que rigen el comportamiento del transporte de masa y energía en los yacimientos geotérmicos que son las mismas que han sido involucradas en la mayoría de los simuladores geotérmicos desarrollados en el Laboratorio de Berkeley [Pruess, 1988].

Suposiciones en el planteamiento del problema.

1. La formación rocosa a través de la cual fluye el fluido geotérmico se considera como un medio poroso, homogéneo e isotrópico.
2. El flujo puede ser en una, dos y tres dimensiones.

3. La presión capilar es despreciable a causa de las altas temperaturas.
4. Se tiene equilibrio termodinámico, es decir, las mismas condiciones de presión y temperatura en la roca y el fluido.
5. El fluido geotérmico es agua pura que puede existir en una o dos fases.

1.1.1.- Ecuación de conservación de masa

$$\frac{\partial \phi \rho}{\partial t} = -\text{div} \underline{F} + q \quad (1.1)$$

donde ϕ es la porosidad del medio rocoso, ρ es la densidad del fluido, \underline{F} es el vector de flujo de masa, q es un término fuente/sumidero que indica extracción/inyección de masa en el yacimiento. La ecuación establece que la variación local (o temporal) de masa es igual al flujo neto de masa más las fuentes y/o sumideros de masa.

1.1.2.- Ecuación de cantidad de movimiento

La cantidad de movimiento del fluido geotérmico está regida por la ley de Darcy que establece que las fuerzas viscosas son proporcionales a la fuerza motriz y, en su caso, a las fuerzas de cuerpo. Considerando flujo bidimensional, las ecuaciones de movimiento en las coordenadas 'x', 'y' son:

$$u = -\frac{k_x}{\mu} \left[\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right] \quad (1.2)$$

$$v = -\frac{k_y}{\mu} \left[\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g_y \right] \quad (1.3)$$

donde k_x y k_y son las permeabilidades absolutas de la roca geotérmica en las direcciones 'x', 'y' respectivamente, μ es la viscosidad del fluido p la presión y \underline{g} el vector de aceleración gravitacional. Al considerar medio isotrópico, el flujo másico total por unidad de área, puede expresarse como:

$$\underline{F} = \rho(u\hat{i} + v\hat{j}) = -\frac{\rho k}{\mu} \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} - \rho \underline{g} \right] \quad (1.4)$$

para flujo bifásico la ecuación anterior es:

$$\underline{F} = \sum_{\alpha=1}^2 \underline{F}_{\alpha} = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\rho_{\alpha} k_{r\alpha}}{\mu} [\nabla p - \rho_{\alpha} \underline{g}] \quad (1.5)$$

Aquí $k_{r\alpha}$ indica la permeabilidad relativa de la fase α (líquida, vapor) y ∇p es el gradiente de presión.

1.1.3.- Ecuación de conservación de la energía

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\text{div} \underline{G} + Q \quad (1.6)$$

siendo U la energía interna volumétrica de la mezcla roca fluido, \underline{G} el flujo de energía y Q un término fuente/sumidero que indica extracción/inyección de energía en el yacimiento.

El flujo de energía involucra términos conductivos y convectivos :

$$\underline{G} = -K \nabla T + \sum_{\alpha} h_{\alpha} \underline{F}_{\alpha} \quad (1.7)$$

donde K es la conductividad térmica efectiva del medio roca/fluido, T es la temperatura y h_{α} es la entalpía específica de la fase α (líquido o vapor).

La energía interna volumétrica para medios porosos puede expresarse como

$$U = \phi u \rho + (1 - \phi) \rho_R C_R T \quad (1.8)$$

Siendo u la energía interna específica del fluido (involucra una o dos fases), C_R y ρ_R son el calor específico y la densidad de la roca respectivamente. El sistema de ecuaciones (1.1), (1.5) y (1.6), solo puede resolverse mediante técnicas numéricas. La no linealidad del sistema de ecuaciones se presenta en los términos convectivos de la ecuación del transporte de energía y en el cambio brusco de las propiedades del fluido cuando ocurren las transiciones de fase. Los procedimientos para dar solución al sistema de ecuaciones serán expuestos en el capítulo 3.

1.2.- Relaciones termodinámicas y de transporte para las propiedades del agua.

Las propiedades termodinámicas del agua han sido representadas en base a correlaciones adoptadas en 1967 por el International Formulation Committee (IFC) para uso industrial y aplicación a programas de computadoras, evitando utilizar una base de datos extensa. Estas fórmulas están disponibles para varios rangos de aplicación, estando las propiedades en función de la presión y la temperatura del medio. La figura 1-1 [IFC, 1967] muestra un esquema que representa varias regiones en función de la temperatura y presión del agua. Cada región está identificada con un número. En el presente trabajo sólo se toman en consideración el área 1 que representa el líquido subenfriado, el área 2 que indica el vapor sobrecalentado y la línea 6 que indica el vapor y líquido en equilibrio.

El intervalo de aplicación de las ecuaciones del IFC [IFC, 1967] que se mencionan a continuación y que se aplican en el simulador GEO es $0 < Pr < 1 \times 10^{+8}$ en Pascales, $0.01 < Tr < 350$ en $^{\circ}\text{C}$.

Solo se eligieron las relaciones de densidad y entalpia específica de la IFC para la fase líquida, ya que en la fase vapor se utilizan las ecuaciones de Santoyo [Santoyo, 1991] y de Spycher [Spycher y Reed 1988]; también para el cálculo de la viscosidades se tienen otras correlaciones, lo cual se debe a que las ecuaciones de la IFC son muy complejas y debido a esto, el tiempo de evaluación de estas relaciones es más tardado. Al final del capítulo cinco se muestra una tabla para un problema en específico y en ella se demuestra que es más conveniente el utilizar las relaciones de Santoyo y de Spycher para reducir los tiempos de convergencia en el simulador GEO.

Antes de utilizar las correlaciones de Santoyo y de Spycher se realizó la validación de estas en el intervalo de aplicación, comparándose los resultados con las tablas de vapor y las correlaciones aportadas por la IFC [IFC, 1967], encontrándose un error porcentual máximo de apenas un 0.29% con respecto a las tablas de vapor y de un 0.28% con respecto a las correlaciones de la IFC.

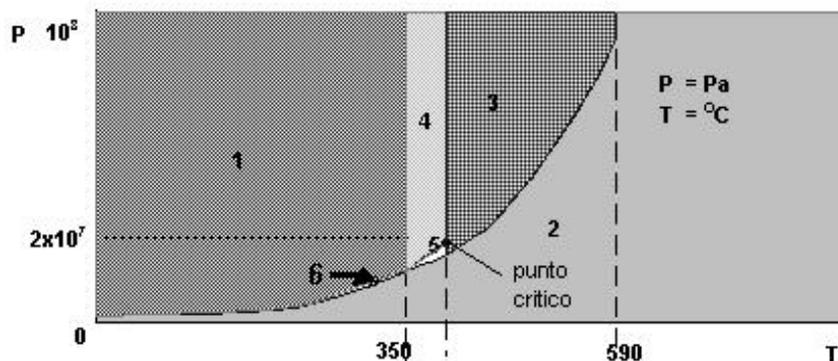


Figura 1-1. Diferentes regiones termodinámicas del agua en función de la temperatura y presión [IFC, 1967].

1.2.1.- Agua pura en la región de vapor sobrecalentado (región 2)

-Densidad del vapor de agua.

En el cálculo de la densidad de la fase vapor se debe tomar en cuenta el factor de compresibilidad Z . Este es una medida de la desviación del comportamiento del gas real respecto al que corresponde al gas ideal. En la figura 1-2 se muestra que en el intervalo de aplicación geotérmica, el factor no es igual a la unidad. De aquí que en la obtención de la densidad para la fase vapor se requiere introducir el factor de compresibilidad en la ecuación de los gases ideales

$$Z = PV_v/RT \quad (1.9)$$

para calcular el factor de compresibilidad se utiliza el modelo de Spycher y Reed [**Spycher y Reed, 1988**]

$$Z = 1 + B P - C P^2 \quad (1.10)$$

donde

$$B = -\frac{6191.41}{T^2} + \frac{14.8528}{T} - 914.267 \times 10^{-5}$$

$$C = -\frac{6633.26 \times 10^{-2}}{T^2} + \frac{18277.0 \times 10^{-5}}{T} - 13274.0 \times 10^{-8}$$

con rango de aplicación de 0 a 350 °C, P es la presión de saturación en bar y T es la temperatura en °K. A partir de la ecuación (1.9) se obtiene la densidad de vapor.

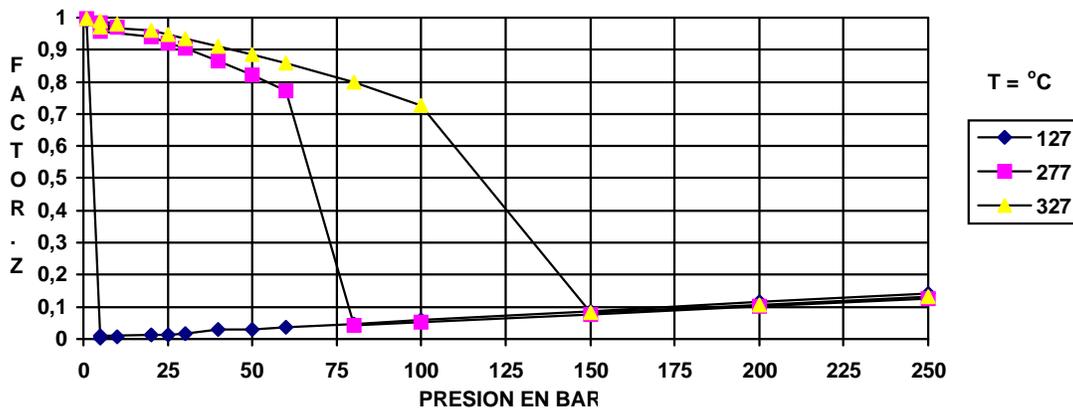


Figura 1-2. Factor de compresibilidad del agua como función de la temperatura y presión, calculados por P.E. Liley [Perry, 1994].

-Entalpia del vapor de agua.

Para la entalpia específica en la fase vapor se seleccionó la correlación usada por Santoyo por ser una relación menos compleja en comparación con la aportada por la IFC, apégándose de forma excelente a los resultados experimentales.

$$h_v = (h_1 + E_1 (R_1 + R_2)) \times 10^{+3} \text{ [=} \text{] J/kg.} \quad (1.11)$$

se tiene que:

$$h_1 = D_1(Tr - D_2)(1 + D_3Pr + D_4Pr^2 - D_5Z_1 - D_6Z_2 + D_7Z_3 + D_8Z_4)$$

$$Z_1 = 1/(1 + 39.5Pr)$$

$$Z_2 = 1/(1 + 27.65Pr)$$

$$Z_3 = 1/(1 + 0.9731Pr)$$

$$Z_4 = 1/(1 + 5.9Pr + 16.3Pr^2)$$

$$Z_5 = E_{10}Pr^4(1 - Pr)^{1/4}$$

$$R_1 = 1 - Tr(E_2 - E_3Pr + E_4Pr^2)$$

$$R_2 = -E_5Pr + E_6Pr^2 + E_7Pr^5 - E_8Pr^6 - E_9Pr^7 + Z_5$$

Pr y Tr son presión y temperatura reducidas respectivamente. Los valores de las constantes D_i y E_i se muestran mas adelante (Tabla 1-1).

-Viscosidad en Pa.s

Para la viscosidad de la fase vapor se utiliza la correlación de Zivolousky y O'Sullivan (1980).

$$\mu_v = (90.0 + 0.35 T)1.0 \times 10^{-7} [=] \text{ Pa.s.} \quad (1.12)$$

1.2.2.- Agua pura en la región de líquido subenfriado (región 1)**-Densidad del líquido en kg/m³ (IFC):**

$$\begin{aligned} V_r = & A_{11}a_5W^{-5/17} + \{A_{12} + A_{13}Tr + A_{14}Tr^2 + A_{15}(a_6 - Tr)^{10} + A_{16}(a_7 + Tr^{19})^{-1}\} - (a_8 + Tr^{11})^{-1} \\ & (A_{17} + 2A_{18}Pr + 3A_{19}Pr^2) - A_{20}Tr^{18}(a_9 + Tr^2) \{-3(a_{10} + Pr)^{-4} + a_{11}\} + 3A_{21}(a_{12} - \\ & Tr)Pr^2 + 4A_{22}Tr^{-20}Pr^3 \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde

$$W = Y + (a_3Y^2 - 2a_4Tr + 2a_5Pr)^{1/2}$$

$$Y = 1 - a_1Tr^2 - a_2Tr^{-6}$$

entonces

$$V_r = V_l/V_c$$

$$\rho_l = \frac{1}{V_l} \quad (1.14)$$

las constantes relacionadas en el cálculo de la densidad del líquido, así como las involucradas en las formulaciones subsiguientes se muestran en la tabla 1-2.

-Entalpia específica del líquido en J/kg. (IFC):

$$\begin{aligned}
hr = & A_0 Tr - \sum_{i=1}^{10} (i-2) A_i Tr^{i-1} + A_{11} [W \{ 17(\frac{W}{29} - \frac{Y}{12}) + 5Tr \frac{Y'}{12} \} + a_4 Tr - (a_3 - 1) Tr Y Y'] W^{-5/17} \\
& + \{ A_{12} - A_{14} Tr^2 + A_{15} (9Tr + a_6)(a_6 - Tr)^9 + A_{16} (20Tr^{19} + a_7)(a_7 + Tr^{19})^{-2} \} Pr \\
& - (12Tr^{11} + a_8)(a_8 + Tr^{11})^{-2} (A_{17} Pr + A_{18} Pr^2 + A_{19} Pr^3) + A_{20} Tr^{18} (17a_9 + 19Tr^2) \\
& \{ (a_{10} + Pr)^{-3} + a_{11} Pr \} + A_{21} a_{12} Pr^3 + 21 A_{22} Tr^{-20} Pr^4 \quad (1.15)
\end{aligned}$$

en la cual

$$Y' = -2a_1 Tr + 6a_2 Tr^{-7}$$

W y Y fueron definidas con anterioridad.

$$hr = h_f / (PcVc) \quad (1.16)$$

-Viscosidad del agua en Pa.s (Correlación de Pruess 1979)

$$\mu_l = 1 \times 10^{-7} Lm(241.4) 10^{T_1} \quad (1.17)$$

donde

$$T_1 = 247.8 / (T + 133.15)$$

$$T_2 = 1.0478(T - 31.85)$$

$$Lm = 1 + T_2(P - P_{sat}) 1 \times 10^{-11}$$

1.2.3.- Agua pura en la línea de vapor saturado (línea 6)

Las propiedades de densidad, entalpia y viscosidad del agua saturada (línea 6, **Figura 1-1**) son dadas por las ecuaciones (1.9), (1.11), (1.12), (1.14), (1.16) y (1.17) sustituyendo el valor de la presión de vapor saturado correspondiente, ecuación (1.18).

Para la presión de vapor saturado en Pascales, se tiene de (IFC):

$$Pr = \exp \left\{ (1/Tr) \left[\sum_{i=1}^5 k_i (1-Tr)^i \right] / [1 + k_6(1-Tr) + k_7(1-Tr)^2] - (1-Tr) / [k_8(1-Tr)^2 + k_9] \right\} \quad (1.18)$$

se tiene que:

$$Pr = P_{\text{sat}}/P_c \quad (1.19)$$

Los valores de las constantes D_i y E_i se muestran en la Tabla 1-2.

$E_1 = 3141.57$	$E_2 = 0.48311$	$E_3 = 1.49127$	$E_4 = 1.00815$
$E_5 = 1.50329$	$E_6 = 0.50329$	$E_7 = 0.00337$	$E_8 = 0.00184$
$E_9 = 0.00152$	$E_{10} = 0.27693$		
$D_1 = 2719.31$	$D_2 = 0.42198$	$D_3 = 0.14423$	$D_4 = 0.02081$
$D_5 = 0.00895$	$D_6 = 0.00161$	$D_7 = 0.00450$	$D_8 = 0.00134$

TABLA 1-1. Constantes involucradas en el cálculo de la entalpía específica del vapor de agua.

$a_1 = 8.438\ 375\ 405 \times 10^{-1}$	$a_2 = 5.362\ 162\ 162 \times 10^{-4}$	$a_3 = 1.720\ 000\ 000 \times 10^{+0}$
$a_4 = 7.342\ 278\ 489 \times 10^{-2}$	$a_5 = 4.975\ 858\ 870 \times 10^{-2}$	$a_6 = 6.537\ 154\ 300 \times 10^{-1}$
$a_7 = 1.150\ 000\ 000 \times 10^{-6}$	$a_8 = 1.510\ 800\ 000 \times 10^{-5}$	$a_9 = 1.418\ 800\ 000 \times 10^{-1}$
$a_{10} = 7.002\ 753\ 165 \times 10^{+0}$	$a_{11} = 2.995\ 284\ 926 \times 10^{-4}$	$a_{12} = 2.040\ 000\ 000 \times 10^{-1}$
$A_0 = 6.824\ 687\ 741 \times 10^{+3}$	$A_1 = -5.422\ 063\ 673 \times 10^{+2}$	$A_2 = -2.096\ 666\ 205 \times 10^{+4}$
$A_3 = 3.941\ 286\ 787 \times 10^{+4}$	$A_4 = -6.733\ 277\ 739 \times 10^{+4}$	$A_5 = 9.902\ 381\ 028 \times 10^{+4}$
$A_6 = -1.093\ 911\ 774 \times 10^{+5}$	$A_7 = 8.590\ 841\ 667 \times 10^{+4}$	$A_8 = -4.511\ 168\ 742 \times 10^{+4}$
$A_9 = 1.418\ 138\ 926 \times 10^{+4}$	$A_{10} = -2.017\ 271\ 113 \times 10^{+3}$	$A_{11} = 7.982\ 692\ 717 \times 10^{+0}$
$A_{12} = -2.616\ 571\ 843 \times 10^{-2}$	$A_{13} = 1.522\ 411\ 790 \times 10^{-3}$	$A_{14} = 2.284\ 279\ 054 \times 10^{-2}$
$A_{15} = 2.421\ 647\ 003 \times 10^{+2}$	$A_{16} = 1.269\ 716\ 088 \times 10^{-10}$	$A_{17} = 2.074\ 838\ 328 \times 10^{-7}$
$A_{18} = 2.174\ 020\ 350 \times 10^{-8}$	$A_{19} = 1.105\ 710\ 498 \times 10^{-9}$	$A_{20} = 1.293\ 441\ 934 \times 10^{+1}$
$A_{21} = 1.308\ 119\ 072 \times 10^{-5}$	$A_{22} = 6.047\ 626\ 338 \times 10^{-14}$	
$k_1 = -7.691\ 234\ 564 \times 10^{+0}$	$k_2 = -2.608\ 023\ 696 \times 10^{+1}$	$k_3 = -1.681\ 706\ 546 \times 10^{+2}$
$k_4 = 6.423\ 285\ 504 \times 10^{+1}$	$k_5 = -1.189\ 646\ 225 \times 10^{+2}$	$k_6 = 4.167\ 117\ 320 \times 10^{+0}$
$k_7 = 2.097\ 506\ 760 \times 10^{+1}$	$k_8 = 1.000\ 000\ 000 \times 10^{+9}$	$k_9 = 6.000\ 000\ 000 \times 10^{+0}$

TABLA 1-2. Constantes involucradas en el cálculo de la entalpía específica, densidad del líquido y presión de vapor saturado.

-Energía interna específica

La energía interna específica para el agua en las fases líquida y vapor se obtiene de las siguientes relaciones termodinámicas:

$$u_l = h_l - \frac{p}{\rho_l} \quad (1.20)$$

$$u_v = h_v - \frac{p}{\rho_v} \quad (1.21)$$

-Permeabilidad relativa

La permeabilidad relativa se calcula por la relación de Corey, para medios porosos [Pruess, 1978]:

para líquido:

$$k_{rl} = (S^*)^4 \quad (1.22)$$

donde:

$$S^* = \frac{(S_l - S_{lr})}{(1.0 - S_{lr} - S_{vr})}$$

S_l = saturación de líquido.

S_{lr} = saturación residual de la fase líquida.

S_{vr} = saturación residual de la fase vapor.

para vapor:

$$k_{rv} = (1.0 - S^*)^2 \left[1.0 - (S^*)^2 \right] \quad (1.23)$$

1.2.4.- Propiedades de mezcla para el agua pura en dos fases.

Para el cálculo de las propiedades de la mezcla líquido-vapor, es necesario conocer la composición en fracción volumen de cada una de las fases para obtener las propiedades de mezcla.

-Densidad de mezcla

$$\rho_{mz} = S_l \rho_l + S_v \rho_v \quad (1.24)$$

$$1 = S_l + S_v \quad (1.25)$$

Donde S_l es la saturación de la fase líquida y S_v es la saturación de la fase vapor en fracción volumen ($S_\alpha = \frac{V_\alpha}{V_T}$).

-Entalpia específica de mezcla:

$$h_{mz} = X_l h_l + X_v h_v \quad (1.26)$$

donde X es la fracción masa de cada fase en la mezcla líquido-vapor [Himmelblau, 1984], según se indica con los subíndices (l, v), donde para tener la entalpia específica de la mezcla en función de la saturación, se tiene que:

$$X_l = \frac{\rho_l}{\rho_m} \quad (1.27)$$

$$X_v = \frac{\rho_v}{\rho_m} \quad (1.28)$$

reemplazando estas igualdades en la ecuación anterior tenemos:

$$h_{mz} = \frac{S_l \rho_l h_l + S_v \rho_v h_v}{\rho_m} \quad (1.29)$$

-Energía interna específica de mezcla:

$$u_{mz} = X_l u_l + X_v u_v$$

sustituyendo (1.27) y (1.28) en la ecuación anterior se obtiene la siguiente relación en función de las saturaciones:

$$u_{mz} = \frac{S_l \rho_l u_l + S_v \rho_v u_v}{\rho_m} \quad (1.30)$$

1.3.- Densidad y energía interna específica de mezcla como variables independientes.

La selección de las variables de estado independientes dependerá del estado termodinámico presente en el flujo. Para un flujo monofásico es común seleccionar temperatura y presión. Para el flujo en dos fases estas no son independientes y resulta conveniente seleccionar a la saturación en lugar de la temperatura o de la presión. Un par de variables de estado que se muestran independientes tanto en medios monofásicos como bifásicos son la densidad y energía interna. Esta selección facilita el uso de expresiones más simples para el manejo del conjunto de ecuaciones gobernantes. La tabla 1-3 resume estas dos opciones en la selección de variables de estado.

1.3.1.- Ventajas y desventajas en la selección de las variables densidad y energía interna como variables independientes.

Un inconveniente que implica el uso de las variables de estado persistentes en una o dos fases, es que no se tiene una forma de correlación sencilla para la obtención de los demás parámetros termodinámicos (presión, temperatura, viscosidad, saturación). Esto da lugar al empleo excesivo de la memoria de la máquina de trabajo para poder almacenar una tabla de consulta de propiedades físicas, en función de las variables de estado seleccionadas (densidad y energía interna). El manejo de una tabla que defina de forma precisa las propiedades termodinámicas del agua pura, como lo hace por ejemplo el simulador SHAFT, es prácticamente imposible en una computadora personal con sistema operativo MS-DOS, debido a que se tiene la limitación de la memoria disponible, la cual se fija en un máximo

de 640 Kb para la elaboración y ejecución de programas. Estudios realizados indican que el tamaño de memoria requerida de la base de datos que maneja el simulador SHAFT es arriba de 2MB. Por otra parte, el hecho de manejar una base de datos de propiedades físicas enorme, implica una búsqueda exhaustiva en la tabla de propiedades, con su respectiva interpolación, para una mayor exactitud en la obtención de los parámetros secundarios, dando lugar a una velocidad de convergencia relativamente lenta en la obtención de los resultados. Esto no resulta realmente muy atractivo si el objetivo principal de la presente tesis es el crear un simulador numérico que opere bajo el sistema operativo MS-DOS de una PC.

NUMERO DE FASES	VARIABLE UNO	VARIABLE DOS
una	presión	temperatura
dos	presión	saturación
una	densidad	energía interna específica
dos	densidad	energía interna específica

Tabla 1-3. Variables termodinámicas de estado que pueden ser utilizadas como variables independientes.

Se tomó la decisión de usar como variables de estado independientes a la densidad y energía interna específica, pero se propuso encontrar una técnica que pudiera ser utilizada para obtener los demás parámetros secundarios, sin necesidad de la manipulación de una base de datos, esta técnica se explica en el capítulo tres.