

Programación Lineal Entera

PE

Programación Entera

- Modelo matemático, es el problema de programación lineal
 - Restricción adicional de variables con valores enteros.
- Programación entera mixta
 - Algunas variables con valores enteros
- Programación entera binaria
 - Solo variables binarias

Método de Ramificación y Acotamiento

- Un problema acotado de PEB, tiene un número finito de soluciones.
- Necesario examinar sólo una fracción de las soluciones factibles.
- Divide y vencerás.
- Acotamiento de la solución y eliminación (sondeo) de los subconjuntos de problema cuya cota no sea mejor que la cota original.

Ejemplo: Ramificación y Acotamiento

- Modelo de programación entera binaria

$$\text{Maximizar } Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$-x_1 + x_3 \leq 0$$

$$-x_2 + x_4 \leq 0$$

$$x_j \leq 1$$

$$x_j \geq 0$$

$$x_j \text{ es entero, para } j = 1, 2, 3, 4.$$

Ejemplo: Ramificación y Acotamiento

- Se relaja el problema original como un problema de PL. Se obtiene la cota inicial.

$$\text{Maximizar } Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$-x_1 + x_3 \leq 0$$

$$-x_2 + x_4 \leq 0$$

$$x_j \leq 1$$

$$x_j \geq 0$$

- Se aplica SIMPLEX y se obtiene la solución óptima:

$$\bullet (x_1, x_2, x_3, x_4) = (5/4, 1, 0, 1) \text{ con } Z = 16 \frac{1}{2}.$$

- Para el problema original de PEB $Z \leq 16 \frac{1}{2}$. Como los coeficientes de la función objetivo son enteros Z debe de dar un valor entero.

- Cota inicial es: $Z \leq 16$.

Ejemplo: Ramificación y Acotamiento

- Primera iteración del algoritmo. PEB. Se fija el valor de una variables
 - $x_1 = 0$, para un subconjunto
 - $x_1 = 1$, para el otro subconjunto
 - Se obtiene las cotas para los sub-problemas relajando estos como PL.

Sub-problema 1: ($x_1 = 0$).

Sub-problema 2: ($x_1 = 1$).

$$\text{Maximizar } Z = 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$\text{Maximizar } Z = 9 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$

$$3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 4$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$+ x_3 \leq 0$$

$$+ x_3 \leq 1$$

$$- x_2 + x_4 \leq 0$$

$$- x_2 + x_4 \leq 0$$

$$x_j \leq 1$$

$$x_j \leq 1$$

$$x_j \geq 0$$

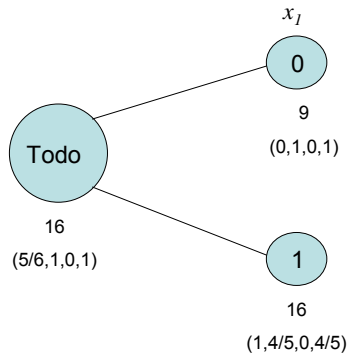
$$x_j \geq 0$$

Se aplica SIMPLEX y se obtiene la solución óptima de cada sub-problema.

Sub1: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0, 1)$ con $Z = 9$. Sub2: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 4/5, 0, 4/5)$ con $Z = 16 \frac{1}{5}$.

Ejemplo: Ramificación y Acotamiento

- Primera iteración del algoritmo
 - Las cotas obtenidas para cada sub-problema son:
 - Sub1: $Z \leq 9$
 - Sub2: $Z \leq 16$



Ejemplo: Ramificación y Acotamiento

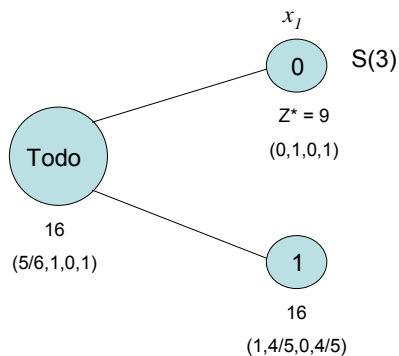
- Pasos para cada iteración:
 - Ramificación: Entre los sub-problemas restantes (no sondeados), se elige el de creación más reciente. (Los empates se rompen con el que tenga la mejor cota) Se ramifica el nodo en ese sub-problema, fijando la siguiente variable.
 - Acotamiento: Cada sub-problema se relaja a PL y acota con simplex redondeando hacia abajo el valor de Z.
 - Sondeo: En cada nuevo sub-problema, se aplican las tres pruebas de sondeo y se descarta el que cumpla cualquier prueba de sondeo.

Ejemplo: Ramificación y Acotamiento

- Pruebas de sondeo (eliminación) de un sub-problema:
 - Prueba 1: cota $\leq Z^*$ (solución de apoyo actual)
 - Prueba 2: El sub-problema relajado como PL no tiene soluciones factibles.
 - Prueba 3: La solución óptima del sub-problema relajado como PL es entera. Si es mejor que Z^* se convierte en la nueva Z^* y se aplica de nuevo la prueba 1, a todos los sub-problemas no sondeados con la nueva z^* .

Ejemplo: Ramificación y Acotamiento

- Primera iteración del algoritmo
 - Al aplicar las tres pruebas de sondeo a los dos sub-problemas 1 y 2. El Sub1 se sondeo por la prueba 3, S(3):



Ejemplo: Ramificación y Acotamiento

- Segunda iteración del algoritmo con $x_1 = 1$. PEB. Se fija el valor de otra variables
 - $x_2 = 0$, para un subconjunto
 - $x_2 = 1$, para el otro subconjunto
 - Se obtiene las cotas para los sub-problemas generados del sub2, relajando estos como PL.

Sub-problema 3: $(x_1 = 1, x_2 = 0)$.

Sub-problema 4: $(x_1 = 1, x_2 = 1)$.

$$\text{Maximizar } Z = 9 + 6x_3 + 4x_4$$

$$\text{Maximizar } Z = 14 + 6x_3 + 4x_4$$

$$5x_3 + 2x_4 \leq 4$$

$$5x_3 + 2x_4 \leq 1$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$x_3 \leq 1$$

$$x_3 \leq 1$$

$$x_4 \leq 0$$

$$x_4 \leq 0$$

$$x_j \leq 1$$

$$x_j \leq 1$$

$$x_j \geq 0$$

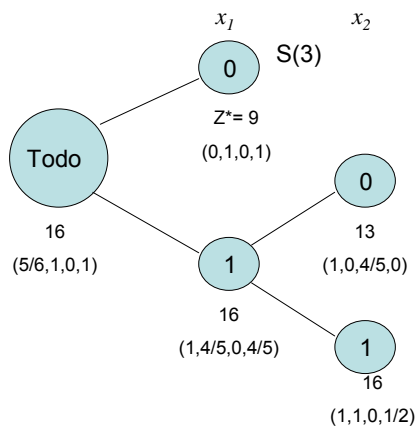
$$x_j \geq 0$$

Se aplica SIMPLEX y se obtiene la solución óptima de cada sub-problema.

Sub3: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 4/5, 0)$ con $Z = 13, 4/5$. Sub4: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 1/2)$ con $Z = 16, 1/5$.

Ejemplo: Ramificación y Acotamiento

- Segunda iteración del algoritmo
 - Las cotas obtenidas para cada sub-problema son:
 - Sub3: $Z \leq 13$
 - Sub4: $Z \leq 16$
 - Ambos problemas quedan sin sondear. El sub4 tiene una cota más grande que el sub3



Ejemplo: Ramificación y Acotamiento

- Tercera iteración del algoritmo con $x_1 = 1, x_2 = 1$. PEB. Se fija el valor de otra variables
 - $x_3 = 0$, para un subconjunto
 - $x_3 = 1$, para el otro subconjunto
 - Se obtiene las cotas para los sub-problemas generados del sub4, relajando estos como PL.

Sub-problema 5: $(x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0)$. Sub-problema 6: $(x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1)$.

$$\text{Maximizar } Z = 14 + 4x_4$$

$$2x_4 \leq 1$$

$$x_4 \leq 1$$

$$x_4 \leq 0$$

$$x_j \leq 1$$

$$x_j \geq 0$$

$$\text{Maximizar } Z = 20 + 4x_4$$

$$+ 2x_4 \leq -4$$

$$+ x_4 \leq 0$$

$$x_4 \leq 0$$

$$x_j \leq 1$$

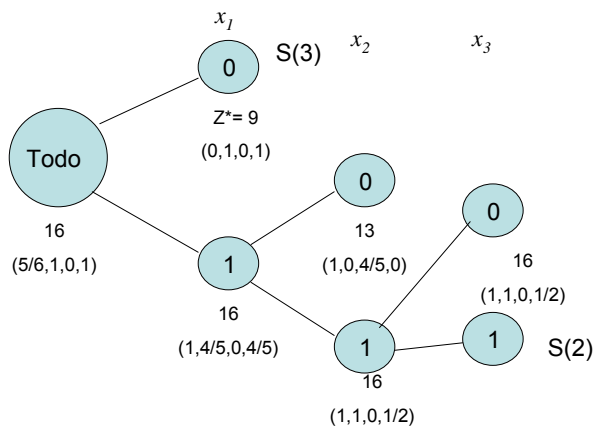
$$x_j \geq 0$$

Se aplica SIMPLEX y se obtiene la solución óptima de cada sub-problema.

Sub5: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 1/2)$ con $Z = 16$. Sub6: No hay solución factible.

Ejemplo: Ramificación y Acotamiento

- Tercera iteración del algoritmo
 - Las cotas obtenidas para cada sub-problema son:
 - Sub5: $Z \leq 16$
 - Sub6: No hay solución factible
 - Los sub-problemas de los nodos $(1,0)$ y $(1,1,0)$ permanecen bajo consideración, pero el último es de creación más reciente, por lo que se selecciona para ramificar.



Ejemplo: Ramificación y Acotamiento

- Cuarta iteración del algoritmo con $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$. PEB. Se fija el valor de otra variables
 - $x_4 = 0$, para un subconjunto
 - $x_4 = 1$, para el otro subconjunto
 - Se obtiene las cotas para los sub-problemas generados del sub5, relajando estos como PL.

Sub-problema 7: $(x_1=1, x_2=1, x_3=0, x_4=0)$. Sub-problema 8: $(x_1=1, x_2=1, x_3=0, x_4=1)$.

Se aplica SIMPLEX y se obtiene la solución óptima de cada sub-problema.

Sub7: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 0)$ con $Z = 14$. Sub8: No hay solución factible.

Ejemplo: Ramificación y Acotamiento

- Cuarta iteración del algoritmo
 - Las cotas obtenidas para cada sub-problema son:
 - Sub7: $Z \leq 14$
 - Sub8: No hay solución factible
 - Aplicando las pruebas de sondeo, la Sub7 pasa la prueba 3 y la sub8 pasa la prueba 2. La solución factible en sub7 es mejor que la de apoyo $Z^* = 9$, por lo que la nueva $Z^* = 14$. Se aplica la prueba 1 de sondeo con Z^* a los sub-problemas sin sondear. Sub3 cota = $13 \leq Z^* = 14$, este sub3 queda sondeado por la prueba 1.

