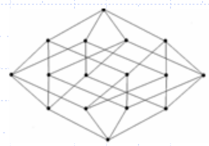
Método de árbol de cubos para resolver problemas de optimización discreta en la toma de decisiones.



CONTENIDO

- Introducción
- Marco teórico
- Métodos de optimización
- Método de árbol de cubos
- Problema de optimización
- Ejemplo

INTRODUCCIÓN

La optimización discreta es el proceso de encontrar una o más soluciones óptimas en un problema discreto bien definido.

Para dar solución a problemas, a través de la optimización discreta se incluyen temas como lógica, teoría de conjuntos, teoría de grafos, entre otros.

3

INTRODUCCIÓN

Establecer un modelo matemático apropiado es sólo parte de la solución. Para completar la solución, se necesita un método que resolverá el problema general usando el modelo.

En esta investigación se presenta un método para solucionar problemas de optimización discreta de grandes dimensiones, llamado "Árbol de cubos", el cual se fundamenta en la teoría de conjuntos y en la teoría de latices.

4

MARCO TEÓRICO

Conjuntos

Los conjuntos son usados para grupos de objetos, frecuentemente estos objetos tienen propiedades similares. La notación para representar un conjunto se representa con una lista de todos los elementos entre llaves. **Ejemplo {a, b, c, d}** representa el conjunto con cuatro elementos a, b, c y d.

5

MARCO TEÓRICO

Dado un conjunto S, el conjunto potencia de S es el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto S. El conjunto potencia de S es denotado por P(S).

El conjunto vacío es el subconjunto de todos los conjuntos esto es $\varnothing \subseteq S$.

Ejemplo el conjunto potencia
P{1,2,3,4}={{∅},{1},{2},{3},{4},{1,2},{1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}, {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4},{1,2,3,4}}

6

MARCO TEÓRICO

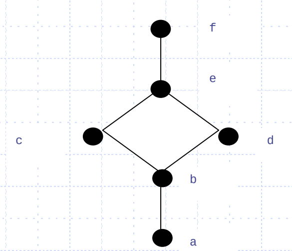
Si un conjunto tiene *n* elementos, entonces su conjunto potencia tiene 2^n elementos.

Por ejemplo para n=4 el conjunto potencia tiene 16 elementos.

MARCO TEÓRICO

- **Latice**

Es un conjunto ordenado parcialmente, en el cual un par de elementos tienen al menos un limite superior y un limite inferior.



(a)

MARCO TEÓRICO

- Un elemento de un latice es máximo si este es mayor que cualquiera de los elementos, es decir a es el máximo elemento en el latice S si no hay elemento $b \in S$ tal que $a < b$.
- Similarmente, un elemento de un latice es mínimo si este es el menor que cualquiera de los elementos del latice, es decir a es el mínimo elemento si no hay elemento $b \in S$ tal que $b < a$.

9

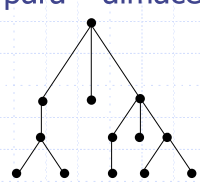
MARCO TEÓRICO

- **Árboles**

Un grafo es una estructura discreta que consiste en vértices y arcos que se conectan por medio de los vértices. Un tipo de grafo es llamado árbol.

Los árboles son usados para:

- Construir algoritmos eficientes que localicen elementos de una lista.
- Construir redes con el mínimo costo.
- Construir códigos eficientes para almacenar y transmitir datos, etc.



10

MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

Dada la dificultad práctica para resolver de forma exacta toda una serie de importantes problemas discretos, comenzaron a aparecer algoritmos que proporcionan soluciones factibles, como son:

NO DETERMINISTICOS
- Algoritmos genéticos
- Búsqueda Tabú
- GRASP
-Redes neuronales, etc..

DETERMINISTICOS
- Ramificación y acotamiento

MÉTODO DE ÁRBOL DE CUBOS

Procedimiento para la construcción del árbol de cubos

Se tiene el cubo inicial de dimensión *m* el cual se denota como *C(m)*

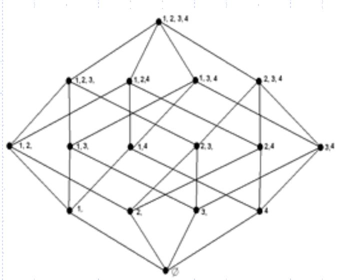
C(m) = [∅, I], donde ∅ representa el vértice mínimo e I = {1, 2, ..., m} representa el vértice máximo en el nivel superior del arbol.

Los elementos (vértices) del cubo son subconjuntos $\omega \subset I$.

Para el intervalo [$\omega 1, \omega 2$], donde $\omega 1 \subset \omega 2 \subset I$, corresponde a un cubo *C(k).*

El cubo *C(m)* se parte en un conjunto de cubos de dimensión menor, donde para cada dos cubos la intersección es el conjunto vacío y la unión de todos los cubos es igual a *C(m).*

Sea C(l), l=m-k donde *k=0, 1, ..., m,* de diferentes dimensiones.



Al nivel superior l=m (k=0) le corresponde el cubo único C(m) de dimensión m.

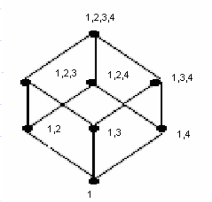
MÉTODO DE ÁRBOL DE CUBOS
Procedimiento para la construcción del árbol de cubos

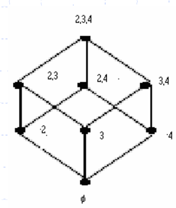
En el nivel siguiente *l=m-1* (l=4–1, k=1)
se distribuyen dos cubos disjuntos: *C1(m-1)* y *C2(m-1)* de dimensión *(m-1)* cada uno, estos cubos se pueden hacer de *m* distintas formas:

◆ Para el cubo *C1(m-1) se* considera un intervalo [{1}, I]

◆Al cubo *C2(m-1)* le corresponde un intervalo *[∅, I|{1}].*

Dos cubos son **subconjuntos disjuntos,** ya que *C1(m-1)∩C2(m-1) = ∅*

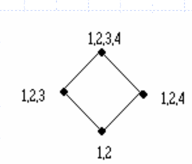


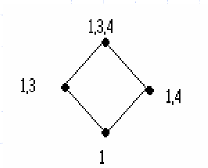


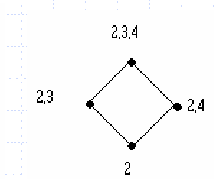
13

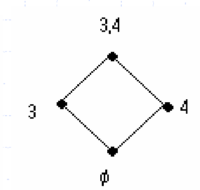
MÉTODO DE ÁRBOL DE CUBOS
Procedimiento para la construcción del árbol de cubos

Posteriormente se forman los niveles siguientes *(m-2),* en cada cubo *C1(m-1)* y *C2(m-1)* se hacen las mismas operaciones. Cada cubo se parte en dos cubos de una dimensión menor, entonces en el nivel *(m-2)* se forman cuatro cubos que son una partición del cubo *C(m).*





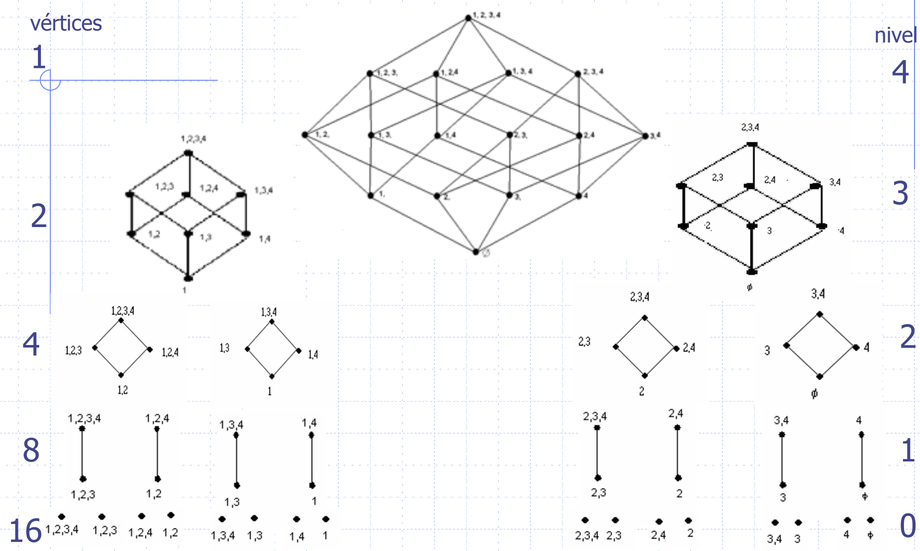




Y así sucesivamente hasta llegar al último nivel (*l=0*), donde el número de cubos de dimensión cero es igual a 2^m. Entonces es igual al número de vértices del cubo inicial *C(m).*

14

MÉTODO DE ÁRBOL DE CUBOS



MÉTODO DE ÁRBOL DE CUBOS
Propiedades del árbol de cubos

- Estructura jerárquica:
  El árbol tiene m+1 niveles $l = m - k$ (k = 0, 1, ..., m-1, m), en el nivel superior (l=m) está un sólo vértice, en los niveles siguientes el número de vértices (número de cubos) es igual a 2^k (k =0, 1, ..., m-1, m).

  Donde m es la dimensión del árbol, es decir el número de elementos.

- Número de vértices del árbol A(m):
  El número de todos los vértices del árbol A(m) es igual a: $2^{m+1} - 1$.

- Generación de diferentes variantes de particiones del árbol A(m):
  El conjunto de vértices de cada nivel del árbol A(m) es la partición del cubo inicial C(m).

- Dependencia del número de vértices del árbol conforme a su nivel:
  $l=m-k$, donde $k = 0, 1, 2, ..., m$ ésta esta dada por: $N(k) = 2^k$.

MÉTODO DE ÁRBOL DE CUBOS
Propiedades del árbol de cubos

- Número de vértices como una función de los intervalos de los niveles del árbol: $2^{k+1}-1$

- Subárboles del árbol *A(m)* y sus propiedades:
  Un subárbol del árbol *A(m)* es un árbol que nació a través de cualquier vértice del árbol *A(m).* El número de todos los subárboles es igual al número de todos los vértices del árbol, esto es igual a $2^{m+1}-1$.

- El árbol de cubos como latice:
  Se introduce en el árbol de cubos un vértice, el conjunto vacío, y se conecta por medio de lados con todos los cubos del nivel cero ($l(k)=0$, $k=m$).

17

PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Con la finalidad de explicar el comportamiento del árbol de cubos para la solución de un problema combinatorio, se utilizará el problema de la mochila 0-1 (0-1 knapsack problem), donde el número de subconjuntos del conjunto {1..n} es 2^n.

El problema de la mochila 0-1 consiste en seleccionar de entre un conjunto de *n* productos, cada uno con un valor c_i y un volumen v_i, aquellos que quepan en un recipiente con volumen B y que tengan el mayor valor posible.

18

PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

En el caso del problema de la mochila, la variable x_i toma valor 1 cuando el elemento *i* se introduce en la mochila y 0 en caso contrario, la formulación sería:

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

con las restricción

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \le B$$

$x_i \in \{0,1\} \ \forall \ i \in \{1..n\}$

19

Reglas para el rechazo de subárboles no optimos

- Si $C(I,\tilde{\omega}) \ge C\left(L,\omega^0,I\right)$, entonces se puede excluir la revisión del subárbol *A(l).*

Algoritmo de búsqueda de la solución optima

El algoritmo de búsqueda de las soluciones optimas se constituye de cuatro etapas.

Etapa 1: la presencia de una buena solución entera permite aumentar la eficacia del algoritmo de búsqueda de la solución optima, ya que aumenta la eficacia de la regla de rechazo.

Etapa 2: Esquema de selección de los vértices del árbol *A(m)*

Etapa 3: Realización de la regla de rechazo. Si C(I, ŵ ≥ *C(L,ω0,l*) se excluye el cálculo al subárbol *A(l),* y se pasa a formar nuevos cubos de otro vértice.

Etapa 4: Retención de las soluciones optimas temporales y la salida del cálculo.

20

EJEMPLO

Se obtienen los coeficientes y se ordenan de mayor a menor $\frac{c_1}{v_1}, \frac{c_2}{v_2}, \ldots, \frac{c_m}{v_m}$

la función objetivo $\max \sum_{j=1}^{m} c_{i_j} x_{i_j}$

Sujeto a: $\sum_{j=1}^{m} v_{i_j} x_{i_j} \leq B$

c_i= coeficientes

v_i=volumen

Ejemplo:

c_i= (3, 8, 7, 6, 2) B=11

vi=(6, 2, 1, 12, 2)

Cálculo de nodo raíz
Nivel 5

1 2 3 4 5

qi=(3/6, 8/2, 7/1, 6/12, 2/2)

3 2 5 4 1

qi =(7, 4, 1, 1/2, 1/2) *Se ordenan*

$\sum v_i$ =1 + 2 + 2 = 5 *Se suman los volúmenes que cumplen con la restricción*

$\sum c_i$ =7 + 8 + 2 = 17 *Se suman los valores de cada elemento*

X1=0, x2=1,x3=1,x4=0,x5=1

EJEMPLO

Cálculo de la función objetivo

$$C(I) = \max \sum_{j=1}^{m} c_i\, x_i$$

Cálculo de la función lineal

$$C(L) = C(I) + \frac{B - \sum_{i=1}^{n} v_i x_i}{v_{i(q+1)}} \left(c_{i(q+1)}\right)$$

Nota: la función objetivo = función entera
La función entera pasa a ser también la función objetivo, cuando esta se convierte en la solución optima temporal

Nodo raíz
f.o.=17
f.l.=20

Función entera = 7 + 8 + 2 = **17**
Para calcular la función lineal se hace lo siguiente:
Función Lineal: 17 + (11-5/12) (6) =**20**
Como se esta calculando el nodo raíz la función entera se considera la solución óptima temporal.
$\therefore$f.o=f.e
Función objetivo=**17**

Esta es la solución optima temporal

EJEMPLO

Cálculo del hijo izquierdo. Nivel 4

q_i=(3/6, 8/2, 7/1, 6/12, 2/2)

Se toma como fijo el primer elemento c1 ya que forma parte de la solución y los demás se vuelven a ordenar

$$f.o. = \sum_{i=1}^{1} c_i x_i + \max \sum_{i=2}^{5} c_i x_i$$

c1 =3 v1=6

Elementos ordenados (7, 4, 1, 1/2)

Se calcula la Bnueva = B - v1= 11 – 6 = 5 Donde Bnueva es la nueva restricción

Se procede a buscar los elementos que cumplan con la restricción sin tomar en cuenta el elemento 1

$\sum v_i$ =1+2+2=5

$\sum c_i$ =7+8+2=17

Se calcula la función entera: f.o. = (3 + 7 + 8+2)=**20**

Se calcula la función lineal f.l. = 20 + 11- (6+5)/ 12 (6)=**20**

Se obtiene una mejor solución

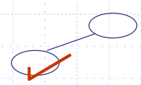
$\therefore$f.o=f.e

Función objetivo=**20**

X1=1, x2=1,x3=1,x4=0,x5=1

Si $f.o._{NR} < f.l_{HI}$

Si $f.e_{HI} > f.o._{NR}$ entonces f.e=f.o



Hijo izquierdo
f.o.=20
f.l.=20

Nodo raíz
f.o.=17
f.l.=20

23

EJEMPLO

Cálculo del hijo derecho . Nivel 4

Aquí se descarta el primer elemento y se toman los valores (7, 4, 1, 1/2)

B=11

Restricciones

$\sum v_i$ =1 + 2 + 2 = 5

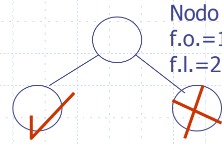
$\sum c_i$ =7 + 8 + 2

f.e. = 7 + 8 + 2 =**17**

f.l. = 17+ 11-5/12 (6) = **20**

Si $f.o._{NR} < f.l_{HI}$

Si $f.e_{HI} > f.o.$entonces f.e=f.o



Nodo raíz
f.o.=17
f.l.=20

Si $f.o._{HI} < f.l_{HD}$

Si $f.O_{HD} > f.o._{HI}$

Hijo izquierdo
f.o.=20
f.l.=20

Hijo derecho
f.e.=17
f.l.=20

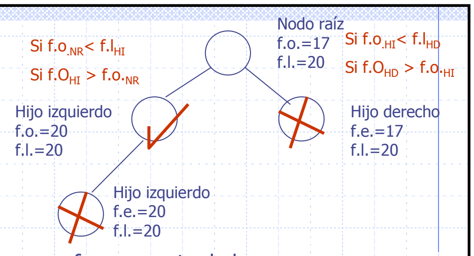
X1=0, x2=1,x3=1,x4=0,x5=1

Se compara con la solución óptima temporal y se evalúa la regla de rechazo.

No cumple, por lo que se corta esta rama.

24

EJEMPLO



Cálculo del hijo izquierdo. Nivel 3

q_i=(3/6, 8/2, 7/1, 6/12, 2/2)

Se toman como fijos los elementos 1 y 2 ya que forman parte de la solución y los demás se vuelven a ordenar

c1=3, v1=6, c2=8, v2=2

Elementos ordenados (7, 1, 1/2)

Se calcula la Bnueva = B – (v1+v2)= 11 –8 = 3 Donde Bnueva es la nueva restricción

Se procede a buscar los elementos que cumplan con la restricción sin tomar en cuenta el elemento 1 y 2.

$$f.o. = \sum_{i=1}^{2} cixi + \max \sum_{i=3}^{5} cixi$$

$\sum v_i$ =1+2=3

$\sum c_i$ = 7+2=9

Se calcula la función entera: Se calcula la función lineal

f.e. = (3 +8)+7+2=**20** f.l. = 20 + 11- (8+3)/ 12 (6)=**20**

Se compara con la solución optima temporal.

No cumple, por lo que se corta esta rama

X1=1, x2=1,x3=1,x4=0,x5=1

EJEMPLO

Cálculo del hijo derecho. Nivel 3

q_i=(3/6, 8/2, 7/1, 6/12, 2/2)

Se toman como fijo el elemento 1 ya que forma parte de la solución y se quita el elemento 2, los demás se vuelven a ordenar.

c1=3, v1=6

Elementos ordenados (7, 1, 1/2)

Se calcula la Bnueva = B – (v1)= 11 – 6 = 5 Donde Bnueva es la nueva restricción

Se procede a buscar los elementos que cumplan con la restricción sin tomar en cuenta el elemento 1 ni el 2.

$\sum v_i$ =1+2=3

X1=1, x2=0,x3=1,x4=0,x5=1

$\sum c_i$ = 7+2=9

Se calcula la función entera: Se calcula la función lineal

f.e. = 3 +9=**12** f.l. = 12 + 11- (6+3)/ 12 (6)=**13**

Se compara con la solución optima temporal.

No cumple, por lo que se corta esta rama

Por lo tanto la solución óptima se encuentra en el nivel 4

EJEMPLO

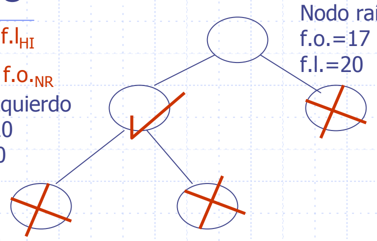
Si f.o.$_{NR}$< f.l$_{HI}$

Si f.O$_{HI}$ > f.o.$_{NR}$

Nodo raíz
f.o.=17
f.l.=20

Si f.o.$_{HI}$< f.l$_{HD}$

Si f.e$_{HD}$ > f.o.$_{HI}$



Hijo izquierdo
f.o.=20
f.l.=20

Hijo derecho
f.e.=17
f.l.=20

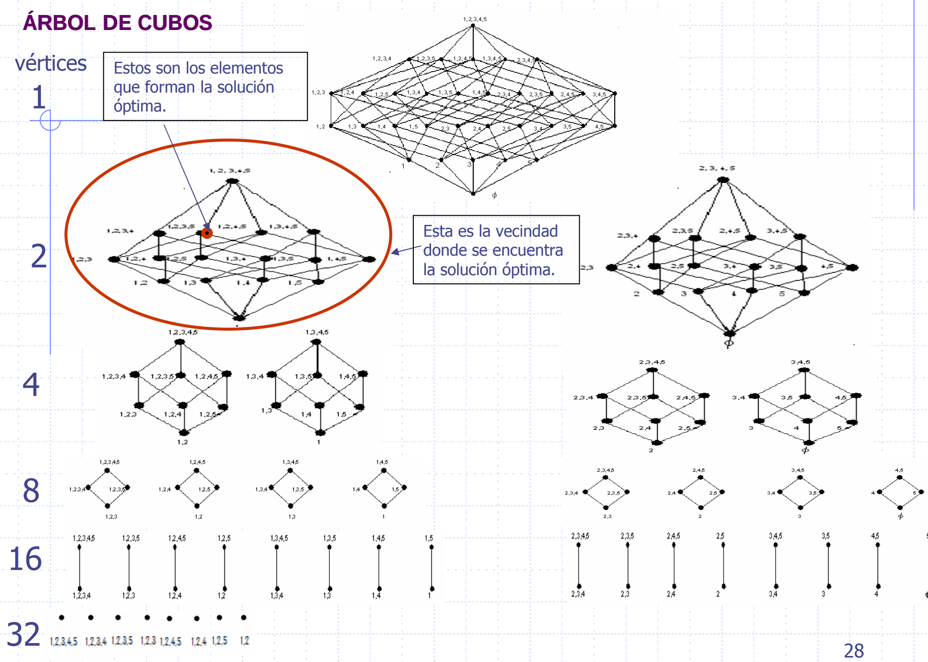
Hijo izquierdo
f.e.=20
f.l.=20

Hijo derecho
f.e.=12
f.l.=13

ÁRBOL DE CUBOS

vértices

Estos son los elementos que forman la solución óptima.



Esta es la vecindad donde se encuentra la solución óptima.

OBSERVACIONES

- Los pasos que se siguen para evaluar si una solución puede ser factible son los siguientes:
  - ✓ Evaluar la regla de rechazo. En caso que no se cumpla la regla de rechazo se procede a aceptar la ramificación.
  - ✓ Después se compara la función objetivo (f.o.) con la función entera (f.e.), si sigue siendo la f.o. mejor que la f.e. entonces se corta la ramificación.
- Si al evaluar el hijo izquierdo y el hijo derecho se obtiene que las dos pueden ser soluciones factibles se escoge la rama que tenga la función lineal más alta, en realidad esta no es una regla propia del método, pero se toma como un criterio de selección entre las ramas.