Método de Bisección

Método que requiere de un intervalo el cual contenga la raíz, esto es, que necesita de dos valores iniciales que estén cada uno a un lado de la raíz. Para encontrar un intervalo que tenga un cambio de signo al evaluar la función, se divide cada intervalo creado en dos sub-intervalos, se evalúa cada uno de los sub-intervalos para encontrar el cambio de signo. Conforme el proceso se repite los sub-intervalos se hacen mas pequeños y y la aproximación ala raíz mejora.

Paso 1. Se escogen los valores iniciales del intervalo xl y xu, de forma tal que la funcion cambie de signo sobre el intervalo, o lo que es lo mismo $f(xl)f(xu)<0$

Paso 2. Encontrar la primera aproximación a la raíz:

$xr = (xl+xu)/2$

Paso 3. Determinar el sub-intervalo en el que eta la raíz:

Si $f(xl)f(xr) < 0$ entonces la raíz esta en el sub-intervalo [xl, xr] y xu = xr

Si $f(xl)f(xr) > 0$ entonces la raíz esta en el sub-intervalo [xr, xu] y xl = xr

Si $f(xl)f(xr) == 0$ entonces la raíz esta en el xr

Paso 4. Calcular una nueva aproximación a la raíz:

$xr = (xl+xu)/2$

Paso 5. Evaluar el error relativo aproximado:

$$Ea = \frac{aproximación\ actual - aproximación\ \ previa}{aproximación\ actual} 100$$

Si Ea < = ε terminar, de lo contrario regresar al paso 3.

Ejemplo: $f(x) = e^{-x} - x$
Intervalo donde esta la raíz = [0, 1]

Método de Newton-Raphson

Se necesita un valor inicial próximo a la raíz, con ese valor se extiende una tangente a f(x) desde el punto [xi, f(xi)]. El punto donde esta tangente cruza el eje x, es una nueva aproximación a la raíz.

El método se puede derivar de forma geométrica o bien por la serie de Taylor

De forma geométrica:

La primera derivada en x es igual a la pendiente $f'(x) = [f(x_{i+1})-f(x_i)]/(x_{i+1}-x_i)$

Donde $f(x_{i+1}) = 0$ cuando x_{i+1} es la raíz, por lo que ordenando los términos

$x_{i+1} = x_i - f(x_i)/ f'(x)$

Por la serie de Taylor:

$f(x_{i+1})= f(x_i) + f'(x_i)h + f''(x_i)h^2/2! + \ldots$

Truncando en la primera derivada y donde

$f(x_{i+1}) = 0$ cuando x_{i+1} es la raíz
$h = x_{i+1} - x_i$

$0 = f(x_i) + f'(x_i) (x_{i+1} - x_i)$

Ordenando términos

$x_{i+1} = x_i - f(x_i)/ f'(x)$

Ejemplo: $f(x) = e^{-x} - x$
$x_0 = 0$
$f'(x) = -e^{-x} - 1$

$x_{i+1} = x_i - [(e^{-x_i} - x_i)/ (-e^{-x_i} - 1)]$

Método de la Secante

Cuando existe problema al derivar una función, la derivada se puede aproximar a través de una secante, la cual corta en dos puntos x_{i-1} y x_i a la función. Los dos puntos que cortan a la función son datos y no requiere que al evaluarse la función con estos puntos, esta cambie de signo como en el método de bisección. La derivada se puede aproximar a la pendiente de esa secante:

$$f(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

Al sustituir en la ecuación de Newton raspón, se tiene la ecuación iterativa de la secante:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Ejemplo: $f(x) = e^{-x} - x$
$x_{-1} = 0$
$x_0 = 1$
