INTERPOLACION Y EXTRAPOLACION DE FUNCIONES RACIONALES.

Algunas funciones no pueden ser aproximadas de una buena forma por polinomios, pero si se pueden aproximar de mejor manera por funciones racionales. Una función racional es la razón de dos polinomios como se muestra en la ecuación (1), la cual pasa por los $m + 1$ puntos $(x_i, y_i) \ldots (x_{i+m}, y_{i+m})$, donde $m + 1 = \mu + \nu + 1$.

$$R_{i(i+1)\ldots(i+m)} = \frac{P_\mu(x)}{Q_\nu(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + \cdots + p_\mu x^\mu}{q_0 + q_1 x + \cdots + q_\nu x^\nu} \qquad (1)$$

El algoritmo de Bulirsch y Store maneja una función racional con los grados de los polinomios en el numerador y denominador igual ($\nu = \mu$) si m (orden del polinomio) es par o con el grado del denominador igual a $\nu = \mu + 1$, si m es impar. El algoritmo trabaja de forma recurrente similar al algoritmo de Neville[1] [Burden y Faires, 1998]. Esta recurrencia genera las funciones racionales interpolantes a través de $m + 1$ puntos, la ecuación recurrente se presenta en (2).

$$R_{i(i+1)\ldots(i+m)} = R_{(i+1)\ldots(i+m)} + \frac{R_{(i+1)\ldots(i+m)} - R_{i\ldots(i+m-1)}}{\left(\frac{x - x_i}{x - x_{i+m}}\right)\left(1 - \frac{R_{(i+1)\ldots(i+m)} - R_{i\ldots(i+m-1)}}{R_{(i+1)\ldots(i+m)} - R_{(i+1)\ldots(i+m-1)}}\right) - 1} \qquad (2)$$

Por ejemplo, para el caso de tres puntos, se presenta la tabla 1 que se genera de forma recurrente aplicando la ecuación (2), las R's se generan completando una columna a la vez. Donde $i = 1, \ldots m+1$, $m = 2$.

Tabla 1. Valores *x* interpolados en cualquier punto especificado para el caso de tres datos.

Orden	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
x_1	$R_1 = y_1$		
x_2	$R_2 = y_2$	$R_{12} = R_2 + \frac{R_2 - R_1}{\frac{x - x_1}{x - x_2}\left[1 - \frac{R_2 - R_1}{R_2}\right] - 1}$	
x_3	$R_3 = y_3$	$R_{23} = R_3 + \frac{R_3 - R_2}{\frac{x - x_2}{x - x_3}\left[1 - \frac{R_3 - R_2}{R_3}\right] - 1}$	$R_{123} = R_{23} + \frac{R_{23} - R_{12}}{\frac{x - x_1}{x - x_3}\left[1 - \frac{R_{23} - R_{12}}{R_{23} - R_2}\right] - 1}$

[1] Método que genera aproximaciones al polinomio de Lagrange de forma recursiva.

De la tabla 1, descender por la tabla equivale a utilizar puntos consecutivos x_i, desplazarse hacia la derecha equivale a aumentar el grado del polinomio interpolante. Esto implica que se generan todos los polinomios desde el orden *1* a *m*, por medio de un procedimiento parecido a una función recursiva.

Ejemplo 1. Generar los puntos interpolantes de la función $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, aplicando:

a) Interpolación con funciones racionales.
b) Interpolación de Lagrange de orden 22.

Tabla 2. Resultados de las diversas interpolaciones generadas para $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$. Interpolación con funciones racionales e interpolación polinomial de Lagrange.

Datos

X	$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$
-2.2	0.17123288
-2	0.2
-1.8	0.23584906
-1.6	0.28089888
-1.4	0.33783784
-1.2	0.40983607
-1	0.5
-0.8	0.6097561
-0.6	0.73529412
-0.4	0.86206897
-0.2	0.96153846
0	1.0
0.2	0.96153846
0.4	0.86206897
0.6	0.73529412
0.8	0.6097561
1	0.5
1.2	0.40983607
1.4	0.33783784
1.6	0.28089888
1.8	0.23584906
2	0.2
2.2	0.17123288

Datos interpolados Función Racional

X	Algoritmo Bulirsch y Store
-2.19	0.172494
-2.1	0.185011
-1.95	0.208192
-1.9	0.216884
-1.7	0.257036
-1.5	0.307651
-1.3	0.371692
-0.9	0.552194
-0.7	0.676409
-0.5	0.800508
-0.3	0.91741
-0.1	0.989852
0.05	0.997673
0.1	0.987963
0.3	0.928059
0.5	0.775117
0.7	0.682398
0.9	0.546476
1.3	0.369464
1.5	0.309102
1.7	0.256098
1.9	0.219081
1.95	0.209907
2.1	0.167036
2.19	0.173259

Datos interpolados Polinomio de Lagrange

X	Interpolación de Lagrange
-2.19	0.25881
-2.1	0.312607
-1.95	0.196177
-1.9	0.207455
-1.7	0.258293
-1.5	0.30746
-1.3	0.371806
-0.9	0.552494
-0.7	0.671137
-0.5	0.800002
-0.3	0.91743
-0.1	0.990099
0.05	0.997506
0.1	0.990099
0.3	0.91743
0.5	0.800002
0.7	0.671137
0.9	0.552494
1.3	0.371806
1.5	0.30746
1.7	0.258293
1.9	0.207455
1.95	0.196177
2.1	0.312607
2.19	0.25881

La figura 1, presenta la gráfica de los resultados mostrados en la tabla 2. Se observa que en los extremos del intervalo [-2.2, 2.2], la interpolación de Lagrange de orden 22 es muy deficiente, mientras que la interpolación con funciones racionales muestra un mejor comportamiento con el valor autentico de la función.

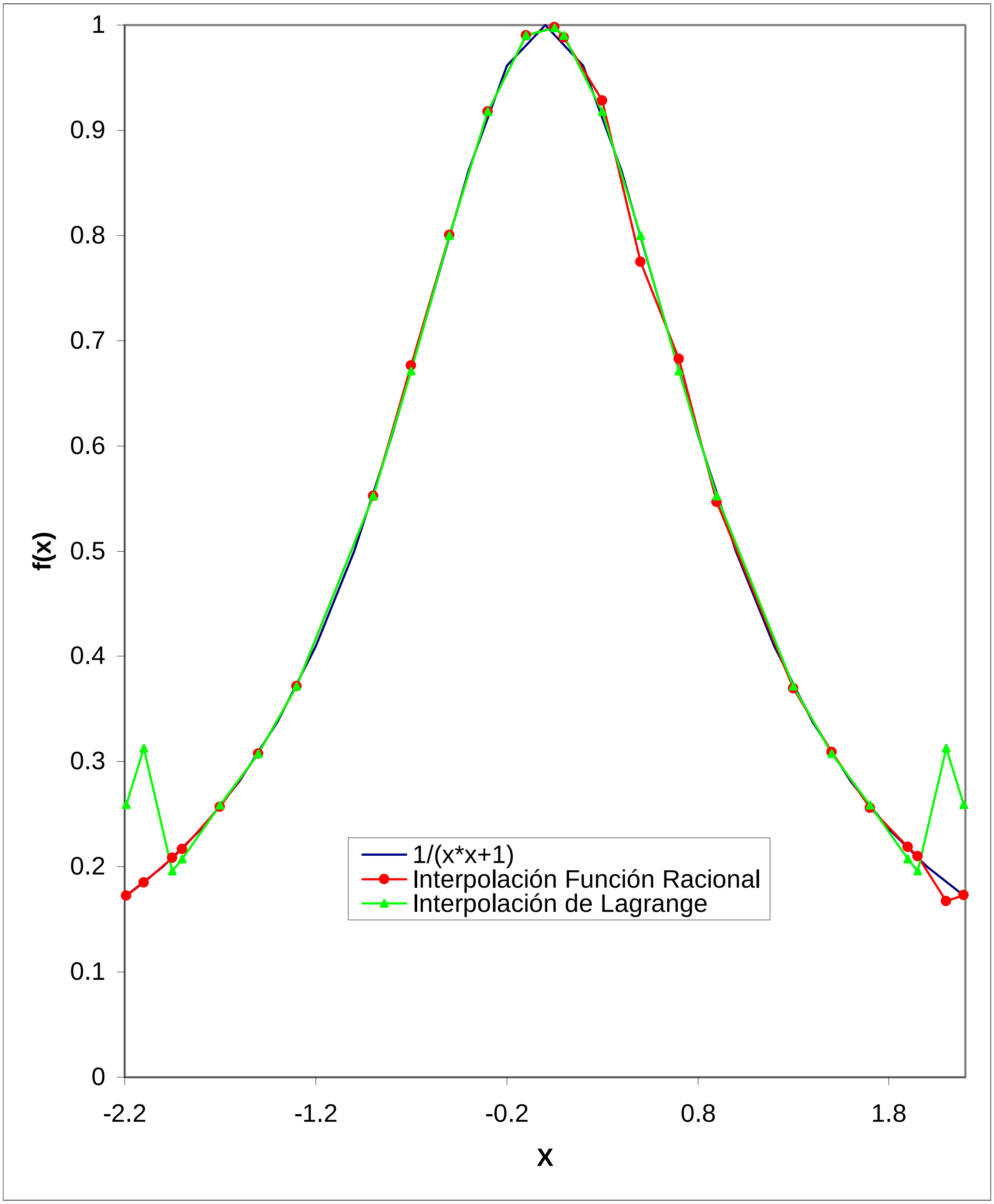

Figura 1. Gráfica resultante de la interpolación de Lagrange de orden 22, la interpolación por funciones racionales y la función de datos originales.