INVERSION DE MATRICES.

Inversión de una matriz [A], aplicando el procedimiento de descomposición LU.

[A] = [L][U]

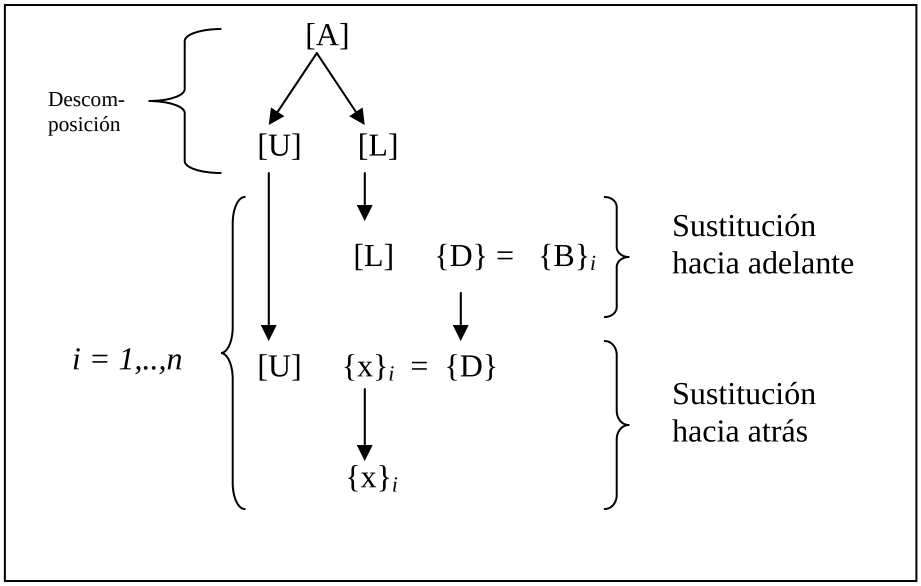

Figura 1. Procedimiento para invertir una matriz [A].

La figura 1, presenta el procedimiento para la inversión de matrices utilizando la descomposición LU. La explicación es la siguiente:

- [U], es la matriz triangular superior obtenida por el procedimiento de eliminación de GAUSS sin tomar en cuenta el vector de términos independientes.

- [L], es la matriz triangular inferior donde su diagonal contiene elementos con valor uno. Esta matriz se puede obtener por el procedimiento GAUSS y se forma con los factores *f* generados en la eliminación hacia delante (ver eliminación de GAUSS).

- [L]{D}=$\{B\}_i$ es el sistema de ecuaciones generado con [L]. {D} vector de incógnitas que se obtiene por sustitución hacia delante. $\{B\}_i$ es un vector unitario de términos independientes, donde cada elemento vale cero a excepción de uno de los renglones. Para $i = 1$, el elemento del renglón uno es igual a 1 y el resto de los renglones es cero etc.

- [U]$\{x\}_i$ = {D}, es el sistema de ecuaciones generado con [U]. $\{x\}_i$ es el vector resultante que equivale a la columna i de la matriz inversa. Este vector se obtiene del sistema por sustitución hacia atrás. Los vectores $\{x\}_1$,…, $\{x\}_n$, generan las columnas $1,\ldots, n$ de la matriz inversa $[A]^{-1}$.

Ejemplo:

Obtener la inversa de la matriz [A].

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Aplicar eliminación de GAUSS y obtener [U] y [L]

Guardar los factores que se emplean para obtener la matriz triangular superior

$$[U] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix}$$

El elemento a_{21} se eliminó con el factor $f_{21} = \dfrac{0.1}{3} = 0.0333333$

El elemento a_{31} se eliminó con el factor $f_{31} = \dfrac{0.3}{3} = 0.100000$

El elemento a_{32} se eliminó con el factor $f_{32} = \dfrac{-0.19}{7.00333} = -0.0271300$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Obtener el vector de incógnitas {D} del siguiente sistema [L]{D}={B_1}, aplicando sustitución hacia adelante

Para i =1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\{D\}^T = [1 \;\; -0.03333 \;\; -0.1009]$

De la figura 1, se resuelve el siguiente sistema [U]{x_1} = {D}, aplicando sustitución hacia atrás.

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.03333 \\ -0.1009 \end{Bmatrix}$$

$\{x^T\}_1$ = [0.33249 -0.00518 -0.01008] = Columna 1 de la matriz inversa

<u>Paso 3: Obtener el vector de incógnitas {D} del siguiente sistema [L]{D}=$\{B\}_2$, aplicando sustitución hacia adelante</u>

Para i =2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\{D\}^T$ = [0 1 0.027130]

De la figura 1, se resuelve el siguiente sistema [U]$\{x\}_2$ = {D}, aplicando sustitución hacia atrás.

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.027130 \end{Bmatrix}$$

$\{x^T\}_2$ = [0.004944 0.142903 0.002709] = Columna 2 de la matriz inversa

<u>Paso 4: Obtener el vector de incógnitas {D} del siguiente sistema [L]{D}=$\{B\}_3$, aplicando sustitución hacia adelante</u>

Para i =3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$\{D\}^T$ = [0 0 1]

De la figura 1, se resuelve el siguiente sistema $[U]\{x\}_3 = \{D\}$, aplicando sustitución hacia atrás.

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$\{x^T\}_3$ = [0.006798 0.004184 0.09988] = Columna 3 de la matriz inversa

La matriz inversa $[A]^{-1}$ es:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33249 & 0.004944 & 0.006798 \\ -0.00518 & 0.142903 & 0.004183 \\ -0.01008 & 0.00271 & 0.09988 \end{bmatrix}$$

Ejercicio:

Comprobar las siguientes relaciones:

$[A] = [L][U]$

$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I]$

Tarea: Hacer un programa que obtenga la inversa de una matriz. Generar la función inversa.

void inversa(A,Ainv,n)