REGLA DEL TRAPEZOIDE.

La regla trapezoidal es parte de las formulas de integración de Newton-Cotes, las cuales se basan en el reemplazo de una función complicada o datos tabulados con una función aproximada que sea fácil de integrar:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$$

Donde $f_n(x)$ es un polinomio de la forma: $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ donde n es el orden del polinomio.

La regla trapezoidal es la primera de las formulas de integración de Newton-Cotes, en el que el polinomio utilizado es el de primer orden.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_1(x)dx$$

La figura 1, presenta la aproximación de una integral como el área bajo una línea recta por medio de un polinomio de orden uno. La figura 2, presenta la aproximación de una integral como el área bajo tres líneas rectas, cada una de ellas representadas por un polinomio de orden uno.

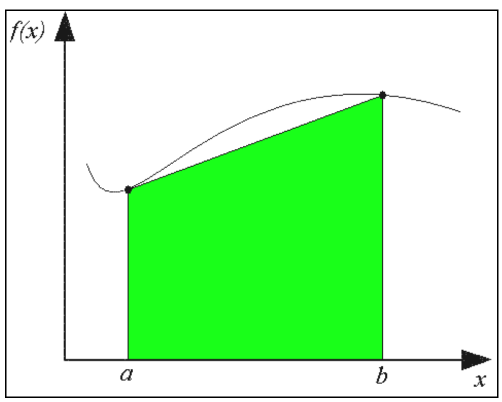

Figura 1. Aproximación de una integral como el área bajo una línea recta.

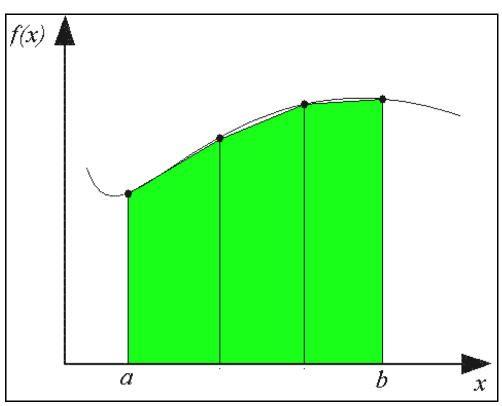

Figura 2. Aproximación de una integral como el área bajo tres líneas rectas.

Desarrollo de la formula trapezoidal.

La función representada como una línea recta es

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

El área bajo esta línea recta es la integral de *f(x)* entre los límites *a* y *b*:

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

El resultado de la integración (ver desarrollo en Chapra-Canale) es

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2} \qquad (1)$$

La ecuación 1 se le llama regla trapezoidal, por tener una figura de tipo trapezoidal acostada (ver figura 1). El área de un trapezoide es igual a la altura por el promedio de la base. En el caso de la regla trapezoidal (Ec. 1), el área es igual a

	I = ancho x altura promedio	(2)

Aplicación múltiple de la regla trapezoidal (ver figura 2).

Para mejorar la exactitud de la regla trapezoidal, se puede dividir el intervalo de integración *[a, b]*, en *n* segmentos iguales y aplicar a cada uno de ellos la ecuación 1. Finalmente sumar los resultados para obtener el área total de integración. Cada segmento tiene un valor de:

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Hay $n + 1$ puntos igualmente espaciados entre el intervalo de *a* y *b*, esto es $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si se designa a los extremos de estos puntos como $x_0 = a$ y $x_n = b$. la integral se puede representar como

	$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$	(3)

Se sustituye la regla trapezoidal (Ec. 1) en cada integral de la ecuación (3)

$$I = h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

Agrupando términos se tiene

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

Sustituyendo el valor de *h*, se tiene la ecuación de la regla trapezoidal de aplicación múltiple en el formato general de la ecuación (2).

$$I = \underbrace{(b-a)}_{Ancho}\underbrace{\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}}_{Altura\quad promedio}$$

Ejercicio:

a) Usar 4 segmentos de la regla trapezoidal para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

Utilice el intervalo desde a = 0 hasta b = 0.8

b) Compruebe con el valor correcto de la integral.