

REGLAS DE SIMPSON.

Las reglas de Simpson son parte de las formulas de integración de Newton-Cotes, que se basan en el reemplazo de una función complicada o datos tabulados con una función aproximada que sea fácil de integrar:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$$

Donde $f_n(x)$ es un polinomio de la forma: $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ donde n es el orden del polinomio.

Regla de Simpson de 1/3

La regla Simpson de 1/3, utiliza un polinomio de segundo orden.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx$$

La figura 1, presenta la aproximación de una integral como el área bajo una parábola por medio de un polinomio de orden dos. Para este polinomio, se requiere conocer tres datos, a , b , y un punto intermedio (a la mitad) entre a y b .

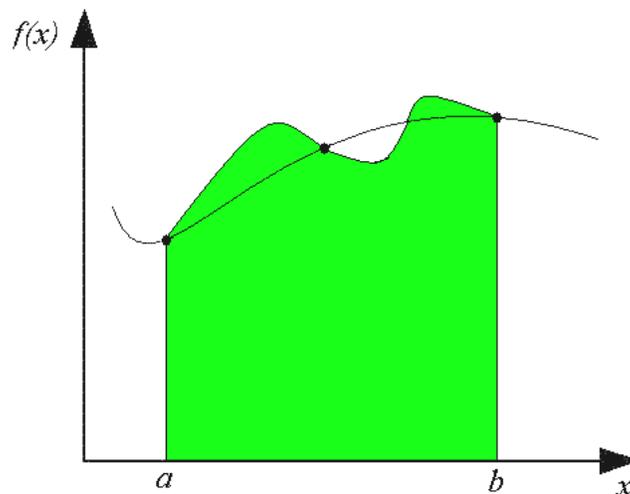


Figura 1. Aproximación de una integral como el área bajo una parábola.

Desarrollo de la formula de Simpson de 1/3.

Si a y b se toman como x_0 y x_2 respectivamente y $f_2(x)$ se representa por un polinomio de Lagrange de orden dos, la integral se transforma a:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

La integración de la expresión anterior y la ordenación algebraica, da como resultado:

$$I \cong \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$h = \frac{(b-a)}{2}$$

$$I = (b-a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \quad (1)$$

Donde $a = x_0$, $b = x_2$ y $x_1 = \frac{b+a}{2}$

La ecuación 1 tiene el formato de un área trapezoidal donde:

	$I = \text{ancho} \times \text{altura promedio}$	(2)
--	--	-----

Aplicación múltiple de la regla de Simpson 1/3.

Para mejorar la exactitud de la regla de Simpson de 1/3, se puede dividir el intervalo de integración $[a, b]$, en n segmentos iguales y aplicar a cada uno de ellos la ecuación 1. Finalmente sumar los resultados para obtener el área total de integración. Cada segmento tiene un valor de:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Hay $n + 1$ puntos igualmente espaciados entre el intervalo de a y b , esto es $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Si se designa a los extremos de estos puntos como $x_0 = a$ y $x_n = b$, la integral se puede representar como

	$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$	(3)
--	---	-----

Se sustituye la regla de Simpson 1/3 (Ec. 1) en cada integral de la ecuación (3)

$$I \cong 2h \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + 2h \frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6} + \dots + 2h \frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6}$$

Agrupando términos y sustituyendo el valor de h se tiene:

$$I = \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\substack{\text{Altura} \\ \text{promedio}}}$$

Ejercicio:

a) Usar 4 segmentos de la regla de Simpson 1/3 para estimar la integral de

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

Utilice el intervalo desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$

b) Compruebe con el valor correcto de la integral.