INTEGRACION DE ROMBERG

Solo funciona si se conoce la función (ecuación) que se desea integrar. Requiere del uso de la regla trapezoidal múltiple. Este método usa dos estimaciones de una integral para calcular una tercera más exacta.

El valor de la integral exacta es la suma del valor estimado con un paso *h* más el error generado:

$$I = I(h) + E(h)$$

Se parte del hecho de que la integración de Romberg requiere de dos estimaciones:

$$I = I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2) \tag{1}$$

El error de la aplicación múltiple de la regla trapezoidal se obtiene por:

$$E \cong -\frac{b-a}{12} h^2 \bar{f}''$$

La razón de los errores de las dos estimaciones es:

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \cong \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

Si se despeja $E(h_1)$ se puede conocer el error sin conocer f'':

$$E(h_1) \cong E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

Sustituyendo $E(h_1)$ en (1) y despejando $E(h_2)$:

$$E(h_2) \cong \frac{I(h_2) - I(h_1)}{\left(h_1 / h_2\right)^2 - 1} \tag{2}$$

Con esto se tiene una estimación del error de truncamiento en términos de los tamaños de paso y las estimaciones de las integrales. Sustituyendo (2) en $I = I(h_2) + E(h_2)$

$$I \cong I(h_2) + \frac{I(h_2) - I(h_1)}{\left(h_1 / h_2\right)^2 - 1} \tag{3}$$

La ecuación (3) es una estimación mejorada a la integral en base a dos estimaciones anteriores.

Para el caso donde el intervalo de una estimación es la mitad del intervalo de la otra estimación, esto es, $h_2 = h_1/2$, sustituyendo esta relación en la ecuación (3), se tiene:

$$I \cong \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1) \tag{4}$$

Ejercicio 1:

A partir de la información de las estimaciones obtenidas con la regla trapezoidal múltiple al evaluar la función $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$, con $a = 0$, $b = 0.8$. Calcule dos estimaciones mejoradas con la ecuación (4). Inicie con $h_1 = 0.8$.

Sobre la base de tres estimaciones de la regla trapezoidal, se pueden obtener dos estimaciones mejoradas. Sobre la base de esas dos estimaciones mejoradas se puede obtener una mejor estimación. La ecuación usada para esta mejor estimación es:

$$I \cong \frac{16}{15} I(h_m) - \frac{1}{15} I(h_l) \tag{5}$$

Donde el subíndice *m* es la estimación mayor y el subíndice *l* es la estimación menor. De manera similar, dos estimaciones con la ecuación (5), se pueden utilizar para calcular una mejor estimación con la formula:

$$I \cong \frac{64}{63} I(h_m) - \frac{1}{63} I(h_l) \tag{6}$$

Algoritmo de Romberg.

El algoritmo de Romberg expresa las formulaciones anteriores en una sola ecuación:

$$I_{j,k} \cong \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1} \tag{5}$$

Donde:
$I_{j+k,k-1}$ = Integral más exacta.
$I_{j,k-1}$ = Integral menos exacta.
$I_{j,k}$ = Integral mejorada.
k = Nivel de integración.

j = Distingue entre la integral más y menos exacta.

Ejemplo:

- Para $k = 1$, corresponde a la regla trapezoidal.
- Para $k = 2$ y $j = 1$, $I_{1,2} \cong \frac{4I_{2,1} - I_{1,1}}{3}$

Para tener un criterio de paro se considera el error relativo porcentual:

$$\left|E_a\right| = \left|\frac{I_{1,k} - I_{1,k-1}}{I_{1,k}}\right| 100\%$$

Ejercicio 2:

Calcule las estimaciones mejoradas hasta el nivel cuatro de integración para la ecuación $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$, con $a = 0$, $b = 0.8$. Inicie con $h_1 = 0.8$.

Solución:

j			k	
	1	2	3	4
1	0.172800	1.367467		
2	1.068800			

1	0.172800	1.367467	1.640533	
2	1.068800	1.623467		
3	1.484800			

1	0.172800	1.367467	1.640533	1.640533
2	1.068800	1.623467	1.640533	
3	1.484800	1.639467		
4	1.600800			