VALORES Y VECTORES PROPIOS

Los valores y vectores propios se conocen también como eigenvalores y eigenvectores. Estos valores y vectores propios se utilizan generalmente en sistemas lineales de ecuaciones homogéneos que representan a problemas de ingeniería. El problema de determinar los eigenvalores de una matriz se presenta en problemas de equilibrio dinámico (vibraciones, elasticidad, sistemas oscilatorios). Un sistema lineal homogéneo tiene la forma general:

$$[\mathcal{A}]\,\{X\} = 0 \qquad (1)$$

En el sistema de ecuaciones mostrado en (1) en forma matricial, se pueden obtener soluciones no triviales (donde el vector X es distinto de cero). Generalmente estas soluciones no son únicas, ya que las ecuaciones simultáneas en (1) establecen relaciones entre las x, las cuales pueden crear vectores $\{X\}$ con distintos valores, cada vector puede satisfacer al sistema (1), esto es, puede existir más de un vector solución.

El sistema matricial en (1), se puede representar en la forma general de un sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{cccccc}
(a_{11}-\lambda)x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & =0 \\
a_{21}x_1 & (a_{22}-\lambda)x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & =0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 & a_{n2}x_2 & +\cdots+ & (a_{nn}-\lambda)x_n & =0
\end{array} \qquad (2)$$

En (2), λ es un valor desconocido llamado valor propio (eigenvalor).Una solución {X} para el sistema (2), se conoce como vector propio (eigenvector). El sistema de ecuaciones en (2) se puede expresar como:

$$\big[\,[A]-\lambda[I]\,\big]\{X\}=0 \qquad (3)$$

Para resolver (3) se requiere conocer λ, y para que exista una solución no trivial, el determinante de la matriz $[\mathcal{A}]=\big[\,[A]-\lambda[I]\,\big]$ debe ser igual a cero. El desarrollo del determinante igualándolo a cero, da como resultado un polinomio (conocido como **ecuación característica**) de grado *n* (tamaño de la matriz) y las raíces de este polinomio son las soluciones de los eigenvalores, pudiendo ser estos con valor repetido. Esta **ecuación característica** es de la forma:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (4)$$

Al sustituir uno de los eigenvalores en la matriz $[\mathcal{A}]$, se obtiene un sistema lineal de ecuaciones homogéneas con solución diferente de la trivial. Para resolver el sistema se da a una de las incógnitas de $\{X\}$ un valor arbitrario, por ejemplo $x_1 = 1$, con esto se obtienen los valores de las otras incógnitas en términos de x_1 al resolver el sistema resultante. Con la solución del sistema se obtendrá el eigenvector correspondiente al eigenvalor utilizado.

Método de Leverrier-Faddeev para la obtención de la ecuación característica.

Este método hace uso de la traza de una matriz (*tr[A]*), esta es la suma de los elementos de la diagonal principal. El método se expresa por el siguiente conjunto de ecuaciones concurrentes:

$$\boxed{\begin{array}{l} b_1 = -\dfrac{trB_1}{1}\text{, en donde } B_1 = A, \\ \\ b_k = -\dfrac{trB_k}{k}\text{, en donde } B_k = A\left(B_{k-1} + b_{k-1}I\right) \\ \\ k = 2, 3, 4, \ldots, n \end{array}} \qquad (5)$$

Donde, $b_1, b_2, \ldots, b_n$, son las constantes $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, de la ecuación característica (4), $a_0 = 1$.

Ejemplo 1. Resolver el sistema matricial $[A]\{X\} = 0$ utilizando eigenvalores:

a) Obtener los coeficientes de la **ecuación característica** de la matriz *[A]*, usando el método de Leverrier-Faddeev.
b) Obtener los λ eigenvalores (raíces) de la ecuación característica.
c) Obtener los *{X}* eigenvectores resultantes del sistema matricial.

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = [A] = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = -trB_1 = -(5+3+1) = -9$$

$$B_2 = A\left(B_1 + b_1 I\right) = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}\right\}$$

$$B_2 = A(B_1 + b_1 I) = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -16 & 2 & 2 \\ 2 & -13 & 5 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = -\frac{1}{2} trB_2 = -\frac{1}{2}(-16 - 13 - 7) = 18$$

$$B_3 = A(B_2 + b_2 I) = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -16 & 2 & 2 \\ 2 & -13 & 5 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = -\frac{1}{3} trB_3 = -\frac{1}{3}(6 + 6 + 6) = -6$$

La ecuación característica es:

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda - 6 = 0$$

Utilizando el método de bisección para obtener las raíces de la ecuación característica se tiene:

$$\lambda_1 = 0.416$$
$$\lambda_2 = 2.294$$
$$\lambda_3 = 6.290$$

El sistema matricial es de la forma $[\,[A]-\lambda[I]\,]\{X\}=0$:

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Sustituyendo el eigenvalor λ_1 en el sistema matricial (6):

$$\begin{bmatrix} 4.585 & -2 & 0 \\ -2 & 2.584 & -1 \\ 0 & -1 & 0.584 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Resolviendo (7) por Gauss-Jordan se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.255 & 0 \\ 0 & 1 & -0.584 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00 & 0 \end{bmatrix}$$

Que es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 0.255x_3 = 0 \\ x_2 - 0.584x_3 = 0 \end{cases}$$

Si se hace $x_3 = 1$, se obtiene que para el eigenvalor $\lambda_1 = 0.416$, el eigenvector es:

$$x_1 = \begin{Bmatrix} 0.255 \\ 0.585 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo el eigenvalor λ_2 en el sistema matricial (6):

$$\begin{bmatrix} 2.706 & -2 & 0 \\ -2 & 0.706 & -1 \\ 0 & -1 & -1.294 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Resolviendo (8) por Gauss-Jordan se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.739 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.773 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Que es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 0.739x_2 = 0 \\ x_3 + 0.773x_2 = 0 \end{cases}$$

Si se hace $x_2 = 1$, se obtiene que para el eigenvalor $\lambda_2 = 2.294$, el eigenvector es:

$$x_2 = \begin{Bmatrix} 0.739 \\ 1.00 \\ -0.773 \end{Bmatrix}$$

Ejercicio 1: Obtener el último eigenvector para el eigenvalor $\lambda_3 = 6.290$.