Determinante de una matriz

El determinante de una matriz determina si los sistemas son singulares o mal condicionados. En otras palabras, sirve para determinar la existencia y la unicidad de los resultados de los sistemas de ecuaciones lineales.

- El determinante de una matriz es un número.
- Un determinante con valor de cero indica que se tiene un sistema singular.
- Un determinante con valor cercano a cero indica que se tiene un sistema mal condicionado.

Un sistema singular es cuando en el sistema de ecuaciones se tiene a más de una ecuación con el mismo valor de la pendiente. Por ejemplo ecuaciones que representan líneas paralelas o ecuaciones que coinciden en los mismos puntos de graficación.

En un sistema mal condicionado es difícil identificar el punto exacto en que las líneas de las ecuaciones se interceptan.

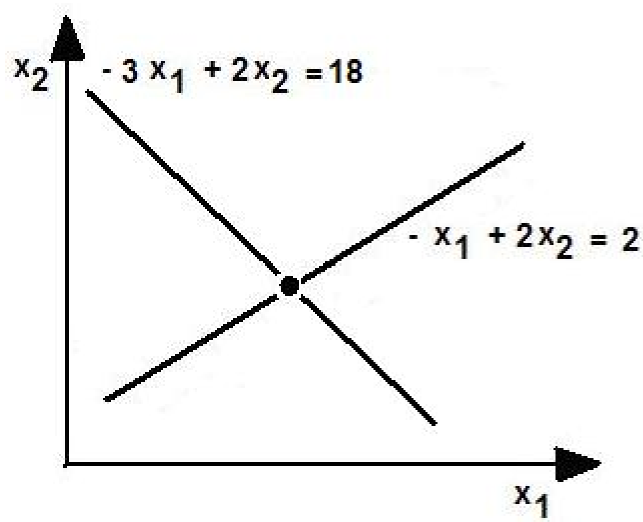

Figura 1. Sistema No-singular. Existe una sola solución en la intersección.

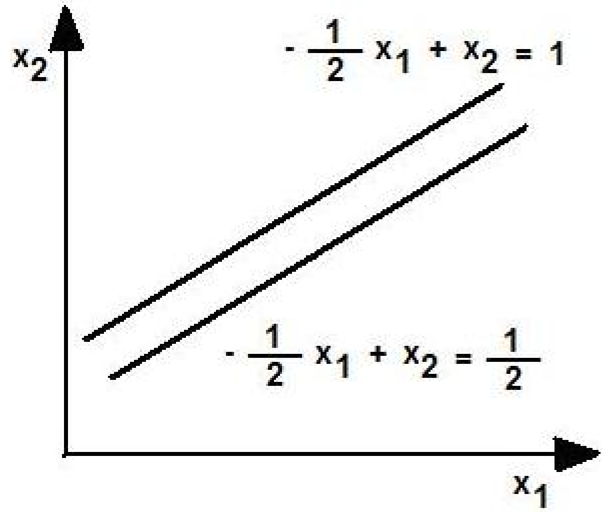

Figura 2. Sistema singular. No existe solución.

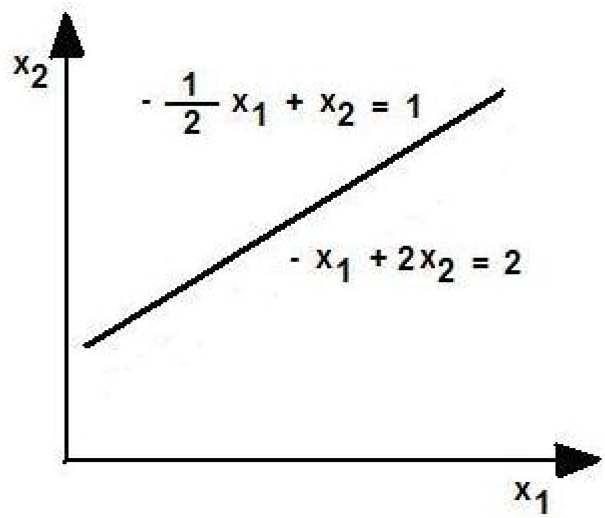

Figura 3. Sistema singular. Existe una gran cantidad de soluciones

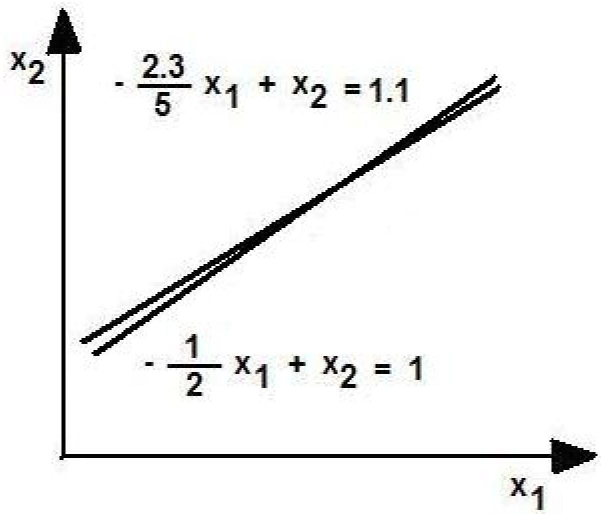

Figura 4. Sistema mal condicionado tienen ecuaciones con pendientes muy cercanas. Un rango amplio de resultados, puede satisfacer el sistema de ecuaciones en forma aproximada.

Determinante de primer orden para la matriz 1 x 1:

$$D = \left| a_{11} \right|$$

Determinante de segundo orden para la matriz 2 x 2:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Se calcula de la siguiente manera:

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante de tercer orden para la matriz 3 x 3:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Se calcula de la siguiente manera:

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1:

Calcular los determinantes de los sistemas de ecuaciones presentados en las figuras 1, 2, 3 y 4.

Regla de Cramer:

Las incógnitas en un sistema de ecuaciones se pueden obtener a partir de una división tomando al denominador como el determinante *D* y al numerador como al determinante D pero reemplazando la columna de coeficientes de la incógnita a resolver por las constantes del vector *B*. Por ejemplo para obtener el valor de la incógnita x_1, para una matriz de 3 x 3:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}$$

Ejercicio 2:

Usar la regla de Cramer para resolver

$0.3x_1 + 0.52x_2 + x_3 = -0.01$

$0.5x_1 + x_2 + 1.9x_3 = 0.67$

$0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.5x_3 = -0.44$

Para más de tres incógnitas el cálculo de determinantes comienza a consumir un tiempo considerable de cómputo, por eso es recomendable aplicar otra estrategia de cálculo. Una estrategia es transformar la matriz de coeficientes en una matriz triangular superior, debido a que el determinante de este tipo de matriz es igual al producto de los elementos de su diagonal:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33}...a_{nn}$$

Ejercicio 3:

Comprobar la regla calculando el determinante de la matriz triangular superior resultante del sistema anterior y compararlo con el resultado obtenido al calcular el determinante de orden 3 en el mismo sistema de ecuaciones.