

# Estructura Híbrida de Vecindad para el Problema del Emparejamiento de Peso Máximo

Yessica Yazmín Calderón-Segura, Marco Antonio Cruz-Chávez

Universidad Autónoma del Estado de Morelos, CIICAp.  
Avenida Universidad 1001. Col. Chamilpa.  
C.P. 62210. Cuernavaca, Morelos.  
{ycaderons , mcruz}@uaem.mx

**Resumen:** En este artículo se presenta el procedimiento para encontrar el emparejamiento peso máximo de un grafo no dirigido mediante un análisis experimental de cuatro estructuras de vecindad. En cada estructura de vecindad se aplicó una búsqueda local iterada con la finalidad de evaluar la estructura de vecindad que presente el mejor desempeño para el problema tratado. Los resultados del análisis de estas estructuras muestran que la estructura de vecindad de par aleatorio presentó el mejor desempeño en cuanto a eficacia y eficiencia.

**Palabras Clave:** Optimización, emparejamiento máximo, dirigido, tgrafo no dirigido, problema p, estructura de vecindad.

## 1. Introducción

Se pueden encontrar gran cantidad de problemas tanto en la industria como en la ciencia, desde los clásicos problemas de diseños de redes de telecomunicación u organización de la producción hasta los más actuales de ingeniería y reingeniería de Software. Existe una infinidad de problemas teóricos y prácticos a los que se les puede aplicar al problema de emparejamiento de peso máximo. Este tipo de problemas con los que tenemos contacto en la vida diaria, pueden ser representados por medio de modelos matemáticos que involucren una función objetivo para ser tratados en el área de Optimización Combinatoria. Esta es una rama muy importante de las ciencias computacionales, dedicada a la investigación de operaciones así como al estudio y tratamiento de problemas considerados difíciles de resolver [1]. El objetivo es abordar el problema con el menor esfuerzo computacional posible y buscar la mejor solución mediante búsquedas locales, lo cual es de gran impacto en las metas heurísticas. El problema de emparejamiento de peso máximo debido a su complejidad se encuentra clasificado como un problema de tipo P por ello se ha empleado técnicas heurísticas de búsqueda aproximada [2] mediante estructuras de vecindad.

M.A. Cruz-Chávez (Ed): CICos 2011, ISBN. 978-607-00-5091-6. pp. 72 – 82, 2011

La literatura demuestra que la búsqueda por vecindad híbrida siempre ha dado buenos resultados para los siguientes problemas:

Optimización de colonia de hormigas [2,3].  
Optimización de colonia de hormigas [3,7].  
Algoritmo de recosido simulado [4].  
Algoritmos genéticos [4].  
Búsqueda Tabú [4].  
Depresión de la búsqueda [5,6].  
Teoría de conjuntos en bruto [7].  
Problema de Optimización [4].

La aportación en este trabajo es el estudio de varias estructuras de vecindad aplicadas al problema del emparejamiento de peso máximo para evaluar la eficiencia y la eficacia de la estructura híbrida.

El presente artículo se divide en las siguientes secciones:

La sección número uno, contiene la introducción, La sección número dos, define el problema de emparejamiento de peso máximo, el cual es utilizado para nos da la primera solución factible para poder aplicar las estructuras de vecindad. La sección número tres, presenta las estructuras de vecindad. La sección cuatro detalla las pruebas experimentales, así como el funcionamiento de cada estructura de vecindad empleada. La sección cinco presenta las conclusiones obtenidas en esta investigación y la sección seis presenta las referencias.

## 2. Emparejamiento de peso máximo

En la actualidad muchos problemas de la vida real pueden ser esquematizados fácilmente utilizando una estructura de datos que representen un grafo. Las estructuras son simples y eficaces en la resolución de problemas ya que los nodos de este pueden representar muchas cosas como por ejemplo: servicios, personas, trabajos, máquinas, moléculas, material, etc.

Un emparejamiento (en inglés, significa matching), en un grafo  $G$  no dirigido y simple es un conjunto de aristas [6], tal que dos aristas cualquiera de  $M$  no tengan un extremo común. Dado un emparejamiento  $M$  en  $G$ , los vértices incidentes con alguna arista de  $M$  se denominan vértices conectados por  $M$  [6]. El resto de los vértices que no cumplen dicha condición se llaman vértices no conectados por  $M$ , aunque el nombre más común que se les asigna es el de vértice libre. Si alguna arista que no está en  $M$  se dice que no está emparejada. Se denomina como pareja a la unión entre el vértice ( $v_1$ ) conectado al vértice ( $v_2$ ) del extremo opuesto en la arista perteneciente al emparejamiento  $M$  que tiene como extremo al primero de los vértices. La figura 1 muestra el emparejamiento máximo en un grafo no dirigido marcado con líneas negras.

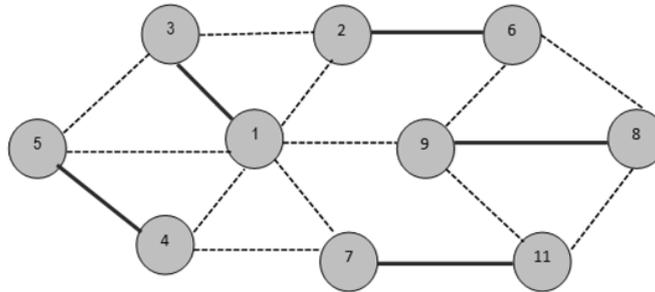


Fig. 1 Emparejamiento Máximo

2.1. Modelo matemático

Hallar un emparejamiento de peso máximo en un grafo puede resolverse en tiempo polinomial en diversas cantidades de nodos. Sea un grafo  $G = (V, E)$ ; donde  $V$  define los vértices,  $V = \{1, \dots, n\}$  y  $E$  representa las aristas. Si el vértice  $i$  se conecta con el vértice  $j$ , la conexión se define con 1. Un 1 significa que existe conexión y un 0 que no existe la conexión. Por lo que  $E = \{(i, j): i, j \in V\}$ , y sea  $c_{ij}$  el costo asociado al vértice  $(i, j)$  sea  $x_{ij}$  el emparejamiento que solo contiene una sola arista. De acuerdo a esto se muestra la formulación matemática para el emparejamiento máximo de un grafo que se presenta en la figura 2.

$$Max f = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_{ij} \quad \longrightarrow \quad (1)$$

s.a.

$$\sum_{k=1}^{i-1} x_{ki} + \sum_{j=i+1}^n x_{ij} = 1, i = 1..n \quad \longrightarrow \quad (2)$$

$$i < j \quad \longrightarrow \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \longrightarrow \quad (4)$$

Fig. 2 Modelo matemático para el emparejamiento de peso máximo

De acuerdo al modelo matemático presentado en la figura 2. El problema de emparejamiento de peso máximo debe cumplir con la función objetivo (1) y el conjunto de restricciones representadas por:(2), (3) y (4) .

La función objetivo representada con un número uno el modelo matemático que determina el emparejamiento y el peso máximo de cada vértice [8-10] donde se realizan las sumatorias del costo  $C_{ij}$  del emparejamiento de peso máximo de la

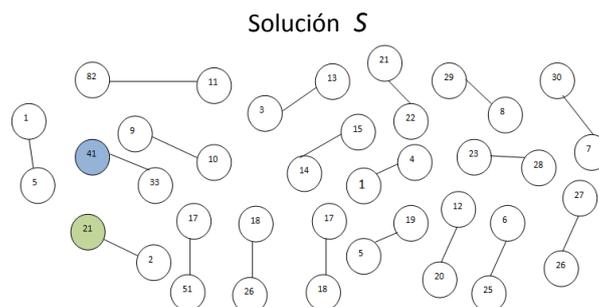
variable  $X_{ij}$ , donde  $n$  es el número total de entradas. La restricción número dos indica el procedimiento para desarrollar el emparejamiento de  $X$  entre  $i$  y  $j$  siempre y cuando este sea verdadero, este se representa con un 1. La restricción número tres indica que  $i$  no puede ser menor que  $j$  para no repetir conexiones al momento de hacer el emparejamiento de peso máximo. La restricción número cuatro indica que cuando exista un emparejamiento de peso máximo será marcado con un 1 y en caso contrario el emparejamiento se marca como falsa representándolo con 0.

### 3 Búsqueda por Vecindad

En esta sección, se presenta la idea básica de la búsqueda local y la aplicación a las estructuras de vecindad. Se utiliza la búsqueda por vecindad porque es una técnica aplicada a los problemas de optimización para mejorar una solución inicial en donde el tamaño del espacio de soluciones permite obtener el óptimo local y además se requiere el uso de una estructura de vecindad [1]. Para aplicar la búsqueda local en el problema de emparejamiento de peso máximo fue necesario definir una estructura de vecindad y una solución factible inicial. La búsqueda por vecindad trata de encontrar la mejor solución evaluando la función objetivo del problema de emparejamiento para encontrar su valor máximo. Para determinar las estructuras de una vecindad, se debe definir un vecindario y el criterio de selección de un vecino [11-13], en este caso el criterio de selección propuesto es conocer el emparejamiento. Es decir, si se cumple el criterio de selección, se lleva a cabo el movimiento con otro par emparejado (ver 3.1), el proceso se repite hasta que la solución encontrada no pueda ser mejorada, por lo que se dice que hemos llegado a un óptimo local. El tipo de movimiento a realizar para seleccionar un vecino se define en la estructura de la vecindad con un par aleatorio, dos pares aleatorios, tres pares aleatorios y una estructura híbrida.

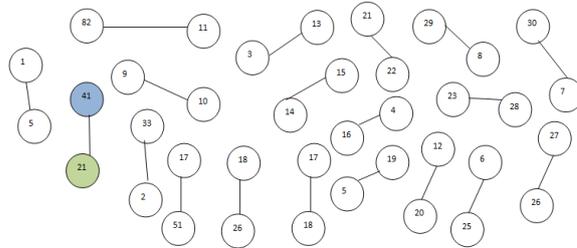
#### 3.1 Estructura de Vecindad Par Aleatorio

Para la estructura de búsqueda por vecindad con un par aleatorio se genera una solución inicial factible a partir de la cual se elige un número aleatorio  $G_v$  (Generar vértice aleatorio), mismo que corresponde a una posición de una matriz en donde se encuentra almacenada la solución inicial. Una vez que se tiene el vértice  $G_v$  aleatorio, se verifica que este corresponda con un vértice emparejado (figura 3) se toma en cuenta el número de arcos posibles del vértice y se elige uno nuevo vértice  $V_1$  de los posibles vértices a conectar, se examina si este es factible para hacer el movimiento. En caso contrario se mantiene la solución sin modificaciones, este procedimiento de estructura de vecindad con un par aleatorio se muestra la figura 3.1.



**Fig. 3** Solución Inicial

Solución  $S'$

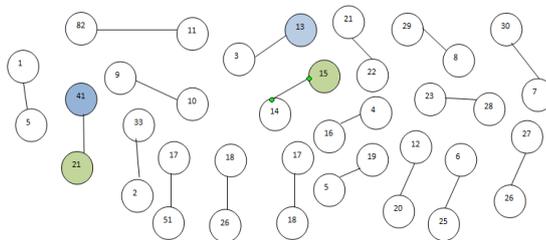


**Fig. 3.1** Estructura de vecindad con un par aleatorio

### 3.2 Estructura de vecindad con dos pares aleatorios

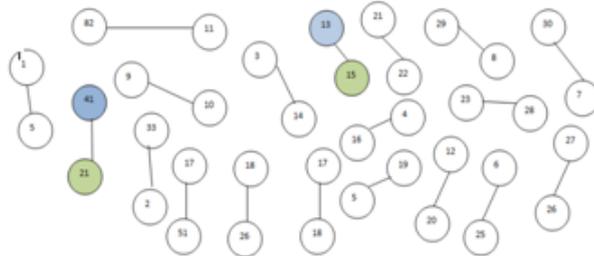
La estructura de búsqueda por vecindad con dos pares aleatorios, genera una solución factible  $s$  inicial (figura 4) a partir de la cual se elige dos vértices que sean generados de forma aleatoria, que cumplan con la condición de estar emparejados en una solución inicial factible. El primer vértice generado de forma aleatoria no debe ser igual al segundo vértice generado de forma aleatoria. En la figura 4.1 se muestra un ejemplo de la posible solución vecina  $s'$  para la estructura con dos pares aleatorios, ya que los vértices elegidos cumplen con la condición establecida para hacer el movimiento correspondiente.

Solución  $s$



**Fig. 4** Solución inicial

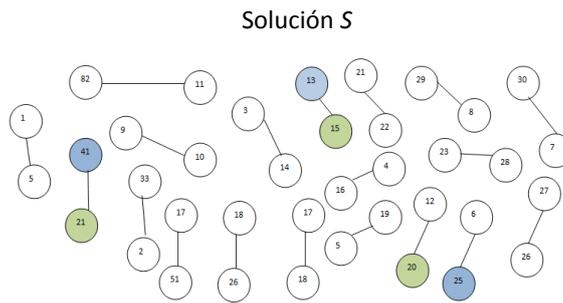
Solución  $s'$



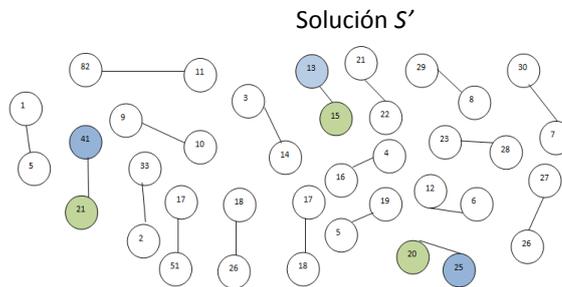
**Figura 4.1** Estructura de vecindad con dos pares aleatorios

### 3.3 Estructura de vecindad con tres pares aleatorios

La estructura de búsqueda vecindad con tres pares aleatorios genera una solución factible  $s$  a partir de la cual se eligen tres números aleatorios que cumplan con la condición de estar emparejados (ver figura 5). El tercer vértice generado no debe ser igual al segundo vértice y el primer vértice debe ser distinto al segundo y tercero, si se cumple la condición se desarrolla el movimiento  $s'$  (ver figura 5.1).



**Fig. 5** Solución inicial



**Figura 5.1** Estructura de vecindad con tres pares aleatorios

### 3.4 Estructura de vecindad con cuatro pares aleatorios

La estructura de búsqueda por vecindad con cuatro pares aleatorios, genera una solución inicial factible  $s$  a partir de la cual se eligen cuatro vértices aleatorios que cumplan el mismo procedimiento mostrados anteriormente. Los cuatro vértices deben ser distintos para desarrollar el movimiento, si se cumple la condición se lleva a cabo el movimiento (ver figura 6.1) de la nueva estructura de vecindad  $s'$  en caso contrario no se desarrolla ningún movimiento.

Solución s

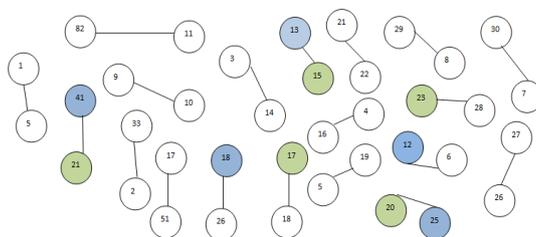


Fig. 6 Solución inicial

Solución s'

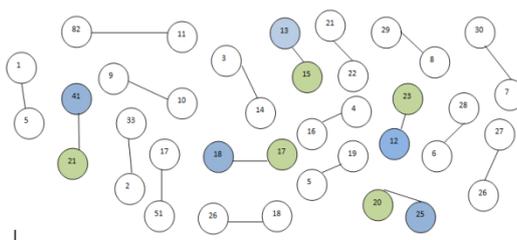


Fig. 6.1 Estructura de vecindad con tres pares aleatorios

### 3.5 Estructura de vecindad híbrida con pares aleatorios

La estructura híbrida es una mezcla de las cuatro estructuras mencionadas anteriormente, las siguientes figuras muestran las posibles estructuras de vecindad a ejecutar de forma aleatoria.

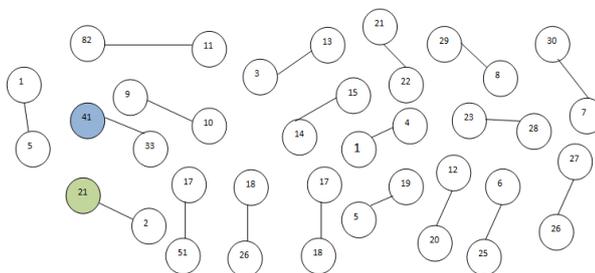
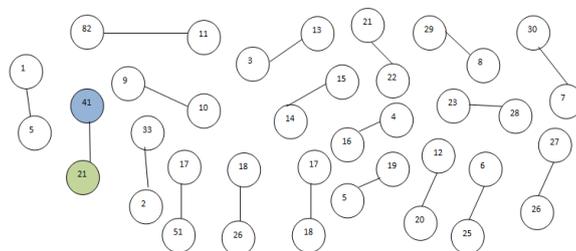
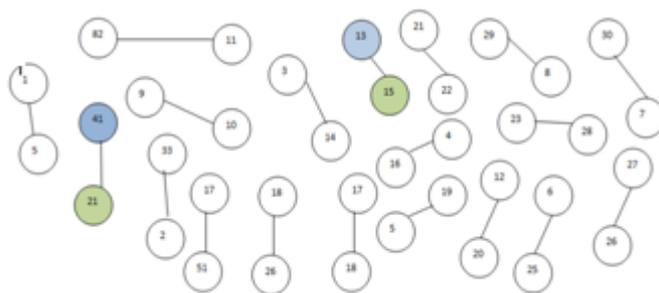


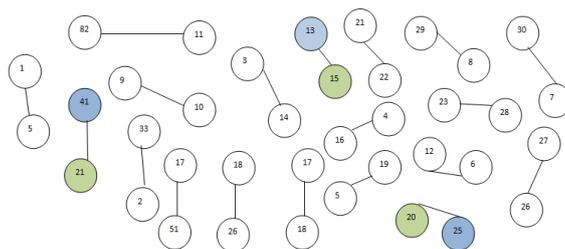
Fig. 7 Solución inicial



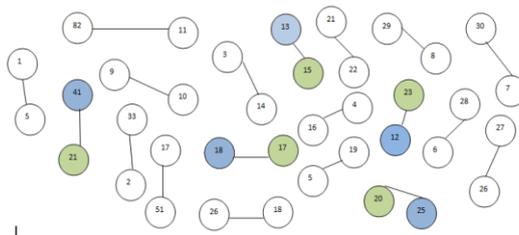
**Fig. 7.1.** Estructura de vecindad con un par aleatorio



**Fig. 7.2.** Estructura de vecindad con dos pares aleatorios



**Fig. 7.3 .** Estructura de vecindad con tres pares aleatorios



**Fig. 7.4.** .Estructura de vecindad Híbrida

## 4 Resultados Experimentales

Las pruebas experimentales realizadas para las estructuras de vecindad aplicadas al problema de emparejamiento de peso máximo, fueron realizadas en el cluster ciicap. El compilador utilizado fue Visual C 2008 se ejecuto la estructura de vecindad con un par aleatorio, la estructura de vecindad con dos pares aleatorios, la estructura de vecindad con tres pares aleatorios, la estructura de vecindad con cuatro pares aleatorios y la estructura híbrida aleatoria.

Los tamaños de instancia probadas fueron de 100 vértices que fueron generados de forma aleatoria. Las estructuras de vecindad fueron ejecutadas 30 veces para cada tamaño de instancia, teniendo un número total de 100 iteraciones realizadas durante la ejecución y registrando los resultados obtenidos de la mejor solución, en cuanto su función de costo. Cada algoritmo fue ejecutado con la respectiva estructura de vecindad para poder realizar una comparación de los resultados obtenidos, hacer el análisis y demostrar la eficiencia y eficacia de la mejor estructura de vecindad que en este caso es la estructura de vecindad con un par aleatorio.

### 4.1 Pruebas de Eficiencia

La tabla 1 presenta los resultados obtenidos para cada estructura de vecindad utilizando un algoritmo de búsqueda local iterada, utilizando el problema de emparejamiento de peso máximo. De estas estructuras se realizó una evaluación de la mejor solución, peor solución, la función de costo promedio, así como su desviación estándar  $\sigma$  de las 30 pruebas realizadas para cada estructura de vecindad. Se puede observar que la estructura de vecindad de par aleatorio en este trabajo es la más eficiente y eficaz. Se considera a la estructura de vecindad con un par aleatorio como la más eficiente por que en la columna de tiempo obtuvo un tiempo de ejecución de 2 minutos un costo de 4285 y una desviación estándar de 19.369 en comparación con las demás estructura propuestas.

La segunda mejor estructura en eficacia es la que realiza dos movimientos aleatorios para la instancia de 100 vértices debido a que obtuvo el mejor costo de 4052 el peor costo con un valor de 3229 y tiene una eficiencia de 6.10 minutos. La estructura promedio en eficiencia es la estructura híbrida aleatoria que obtuvo una eficiencia de 8.93 minutos. El mejor costo en eficacia con un valor de costo 4030 para la instancia de 100 vértices. El comportamiento de la desviación estándar para cada estructura muestra que la dispersión de las soluciones en las 30 pruebas, es diferente dependiendo de la permutación que se aplique, mientras mayor sea la desviación estándar, mayor será la variabilidad en calidad de la solución.

**Tabla 1** Resultados para 100 Vértices con 30 ejecuciones por cada búsqueda local iterada para cada estructura.

<b>100 VÉRTICES</b>						
<b>TIPO DE ESTRUCTURA</b>	<b>TIEMPO</b>	<b>MEJOR</b>	<b>PEOR</b>	<b>PROMEDIO</b>	<b><math>\sigma</math></b>	
<b>Par Aleatorio</b>	<b>2 min</b>	<b>4285</b>	<b>3502</b>	<b>4137.23</b>	<b>19.369</b>	
Dos Pares Aleatorios	6.1053 min	4052	3239	3921.3	69.89	
Tres Pares Aleatorios	40.38 min	3971	3168	3812	80.33	
Cuatro Pares Aleatorios	558.516 min	3826	2901	72.62	3693.4	
Híbrida	8.93 min	4030	3271	3881.7	69.59	

### Trabajo Futuro

Debido a que la estructura de vecindad con un par aleatorio y la estructura híbrida aleatoria muestran el mejor rendimiento en comparación con la demás estructuras propuestas. Se implementaran las dos estructuras mencionadas anteriormente en un algoritmo de aceptación por umbral, para evaluar la eficiencia y eficacia de dicho algoritmo.

### Conclusiones

Este trabajo de investigación demuestra que la estructura con un par aleatorio en cuanto a eficacia es la mejor a comparación con las otras cuatro estructuras. En eficiencia la estructura híbrida esta en un rango intermedio a comparación con las

otras estructuras, es decir no es la de mejor tiempo de ejecución, pero tampoco es la de peor rendimiento. Se concluye que la estructura híbrida propuesta en este trabajo no es la más adecuada para el problema de emparejamiento máximo.

## Referencias

- [1] T. Stützle. Local search algorithms for combinatorial problems analysis, algorithms and news applications. DISKI Dissertationen zur Künstlichen Intelligenz., 1999.
- [2] R. Jensen and Q. Shen, "Finding Rough Set Reducts with Ant Colony Optimization," Proc. 2003 UK Workshop Computational Intelligence, pp. 15-22, 2003.
- [3] R. Jensen and Q. Shen, "Fuzzy-rough sets for descriptive dimensionality reduction," in Fuzzy Systems, 2002. FUZZIEEE' 02. Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on, 2002, pp. 29-34.
- [4] Hedar, J. Wang, and M. Fukushima, "Tabu search for attribute reduction in rough set theory," Soft Computing – A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications, vol. 12, pp. 909-918, 2008.
- [5] Michiels Wil, Aarts Emile, Korst Jan Theoretical Aspects of Local Search, Philips Research High Tech Campus 345656 AE Eindhoven The Netherlands and Eindhoven University of Technology P.O. Box 513 5600MB Eindhoven The Netherlands, 1998.
- [6] Papadimitriou, C.H., Steiglitz, K. Combinatorial Optimization, Algorithms and Complexity. Dover Publications, Inc. Mineola, New York. USA ed. 1998.
- [7] L. Ke, Z. Feng, and Z. Ren, "An efficient ant colony optimization approach to attribute reduction in rough set theory," Pattern Recognition Letters, vol. 29, pp. 1351-1357, 2008.
- [8] Devavrat, Shah.( 2003)." Maximal Matching Scheduling is Good Enough".Department of Computer Science, Stanford University, 2003.ISNB: 0-7803-7974-8. pp 3003-3013.
- [9] Ausiello, G., Crescenzi, P., Gambosi, G., Kann, V., Marchetti-Spaccamela, A., Protasi, M.: Complexity and approximation: Combinatorial Optimization Problems and their Aproximability Properties. Springer-Verlag. 1999.
- [10] Cruz-Chávez M. A., Díaz-Parra O., Juárez Romero D., Barreto Sedeño E., Zavala Díaz C, Martínez Rangel M. G.,Un Mecanismo de Vecindad con Búsqueda Local y Algoritmo Genético para Problemas de Transporte con Ventanas de Tiempo, CICos 2008, 6to Congreso Internacional de Cómputo en Optimización y Software, ACD, 607 00-0165-9, ISBN(i) 978-970-9750-26-3, pp 23-32, 25-27 Junio, México, 2008.
- [11] Yanfeng Zheng., Shutao Sun.:Parallelized Scheduling Algorithm for Input Queued Switches Using Local Search Technique., Institute of computing technology Chinese academy of sciences Beijing 100080,china,May.2005 .pp .43-48, ISSN:0-7803-8991-3., IEEE Computer Society Press.
- [12] Yahya Z.Arasy., Salwani Abdullah.: Hybrid Variable Neighbourhood Search Algorithm for Attribute Reduction in Rough Set Theory.,Data Mining and Optimisation Research Group(DMO),Centre for Artificial Intelligence Technology University Kebangsaan Malaysia,43600 Bangi Selangor,Malaysia.,oct.2010., ISSN:978-1-4244-8136-1 , pp .110-120, IEEE,International Conference on Intelligent Systems Design and Application.
- [13] Wetzal. A.(1987). Evaluation of the Effectiveness of Gabbas A. El Gamal, Lane A. Hemachandra, Itzha Shperling, Victor K. Wei: Using simulated annealing to design good codes. In: IEEE Trans. On information theory, Vol.it-33, No. 1, (January, 1987) 116-123