

# Aplicación de la Optimización por Enjambre de Partículas a un Problema Inverso de Conducción de Calor

Obed Cortés-Aburto, Rafael Rojas-Rodríguez, C. Román Marín-Dávila

Universidad Politécnica de Puebla, Tercer Carril del Ejido "Serrano" s/n, San Mateo Cuanalá,  
Juan C. Bonilla, Puebla, C.P. 72640. Tel./Fax: (222) 774 6641.  
obedca@uppuebla.edu.mx

**Resumen.** El presente trabajo utiliza la optimización por enjambre de partículas (PSO) para estimar la función de generación de calor de un aparato de placa caliente con guarda (APCG). Este aparato se utiliza en la determinación de la conductividad térmica de materiales aislantes. La aplicación se desarrolla en una dimensión y en coordenadas cilíndricas. Las geometrías que se utilizan son: un disco (para la Placa Caliente) y una corona (para la Guarda). Se utilizan desde uno hasta cinco parámetros. Los resultados se comparan con los obtenidos con el Método de Levenberg-Marquardt. Se prueba de esta manera la capacidad de este método para recuperar la función analítica. Los resultados exhiben un buen ajuste con los valores experimentales.

**Palabras clave:** Optimización por Enjambre de Partículas, Conducción de Calor Inversa.

## 1 Introducción

Los problemas inversos en transferencia de calor se valen de las mediciones de temperatura y/o flujo de calor para estimar las cantidades desconocidas que se presentan en los modelos matemáticos de problemas físicos en este campo [1, 2].

El uso de las técnicas de análisis inverso representa un nuevo paradigma de investigación. No es simplemente el comparar los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas y de los experimentos a posteriori, sino que existe una sinergia estrecha entre los investigadores experimentales y los teóricos durante el desarrollo de los estudios para obtener la mayor cantidad posible de información a partir del problema físico en cuestión [3]. Por tal razón, en años recientes los problemas inversos han evolucionado de ser un tema de

investigación teórica específica a ser una importante herramienta práctica del análisis de ingeniería.

Los problemas inversos se pueden resolver mediante una metodología de *estimación de parámetros* o de *estimación de función*. Si se tiene alguna idea acerca de la forma funcional de la cantidad desconocida, el problema inverso se puede reducir a la estimación de unos pocos parámetros desconocidos. Por el contrario, si no tenemos dicha información, necesitamos considerar el problema inverso como de estimación de función en un espacio dimensional infinito de funciones.

Los problemas inversos también se clasifican matemáticamente como *mal planteados*, en tanto que los problemas normales de transferencia de calor son *bien planteados*. La solución de un problema bien planteado debe satisfacer las condiciones de existencia, unicidad y estabilidad con respecto a los datos de entrada. La existencia de un problema inverso de transferencia de calor puede asegurarse mediante razonamiento físico. Pero la unicidad de la solución de los problemas inversos puede probarse matemáticamente solo para algunos casos especiales. Además, el problema inverso es muy sensible a los errores aleatorios de los datos medidos de entrada y por tanto, requiere técnicas especiales en su solución para satisfacer la condición de estabilidad.

Una solución exitosa de un problema inverso generalmente involucra su reformulación como un problema bien planteado aproximado y hacer uso de algún tipo de método de regularización (estabilización).

En este artículo, se prueba un método para la solución de problemas inversos de transferencia de calor. El problema de prueba involucra la recuperación de la función de generación de calor en coordenadas cilíndricas en una dimensión. Se utilizan dos geometrías, un disco y un anillo. Los resultados concuerdan con los experimentos en forma bastante aceptable.

## 2 Problema Directo

Las mediciones de temperatura se obtienen a partir de la caracterización de un dispositivo para determinar la conductividad térmica de materiales aislantes utilizados en la construcción en México. Este dispositivo se conoce como Aparato de Placa Caliente con Guarda (APCG). El problema se puede definir como:

Una placa caliente tiene una resistencia  $g(t)$  situada en  $r_1 = 0.0538$  m, temperatura inicial  $T_0 = 302.378$  K al tiempo  $t = 0$  s y pierde calor por convección en un medio con temperatura  $T_{amb} = 302.378$  K en la frontera ubicada en  $r = b = 0.0762$  m para tiempos  $t > 0$ . La guarda tiene una resistencia  $g(t)$  situada en  $r_2 = 0.0983$  m, temperatura inicial  $T_0 = 300.39$  K al tiempo  $t = 0$  s y pierde calor por convección en un medio con temperatura  $T_{amb} = 300.39$  K en ambas fronteras ubicadas en  $r = b = 0.0762$  m y  $r = d = 0.1524$  m para tiempos  $t > 0$ . Los dos diagramas se muestran en las Figuras 1 (a) y (b).

La formulación matemática de estos problemas directos de conducción de calor es de la siguiente forma [4]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{g(t) \cdot \delta(r - r_1)}{2\pi kr} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < r < b, t > 0 \quad (1a)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} + hT = hT_{amb} \quad r = b, t > 0 \quad (1b)$$

$$T = T_0 \quad 0 \leq r \leq b, t = 0 \quad (1c)$$

para la Placa Caliente, y

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{g(t) \cdot \delta(r - r_2)}{2\pi kr} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad b < r < d, t > 0 \quad (2a)$$

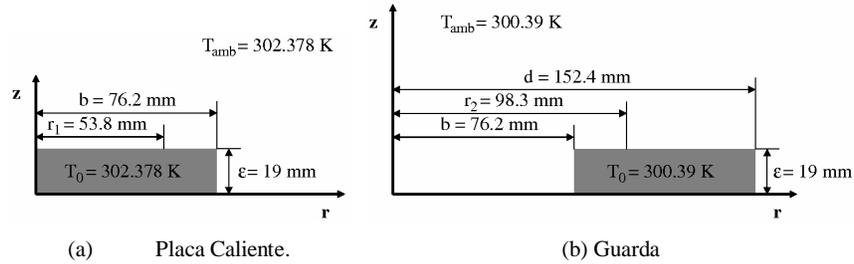
$$-k \frac{\partial T}{\partial r} + hT = hT_{amb} \quad r = b, t > 0 \quad (2b)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} + hT = hT_{amb} \quad r = d, t > 0 \quad (2c)$$

$$T = T_0 \quad b \leq r \leq d, t = 0 \quad (2d)$$

para la Guarda, donde  $\delta(\cdot)$  es la función delta de Dirac.

La solución para este problema se obtiene mediante el método de la transformada integral [4]. Para el problema inverso que se considera en este artículo, la fuente de calor  $g(t)$  variable en el tiempo se considera como una incógnita. La información adicional que se obtuvo de las mediciones de temperatura en estado transitorio registradas en la posición  $r = r_{med}$  en los tiempos  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$  se utiliza entonces para la estimación de  $g(t)$ .



**Fig. 1.** Modelo físico del Aparato de Placa Caliente con Guarda.

Para este trabajo se considerará una aproximación desde uno hasta cinco parámetros, expresada de la siguiente forma

$$g(t) = P_1 + P_2 t + P_3 t^2 + P_4 t^3 + P_5 t^4 \quad (3)$$

La solución de este problema inverso de conducción de calor para la estimación de los parámetros desconocidos se basa en la minimización de la norma ordinaria de mínimos cuadrados dada por

$$S(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^I [Y_i - T_i(\mathbf{P})]^2 \quad (4)$$

donde

$S$  = Suma de los cuadrados de los errores o función objetivo

$\mathbf{P}^T$  =  $[P_1, P_2, \dots, P_N]$  = Vector de parámetros desconocidos

$T_i(\mathbf{P}) = T(\mathbf{P}, t_i)$  = Temperatura estimada al tiempo  $t_i$

$Y_i$  =  $Y(t_i)$  = Temperatura medida al tiempo  $t_i$

$N$  = Número total de parámetros desconocidos

$I$  = Número total de mediciones, donde  $I \geq N$

Las temperaturas estimadas  $T_i(\mathbf{P})$  se obtienen de la solución del problema directo en la posición de las mediciones,  $r_{med}$ , utilizando la estimación actual de los parámetros desconocidos.

Para minimizar la norma de mínimos cuadrados dada por la Ec. (4) se necesita igualar a cero las derivadas de  $S(\mathbf{P})$  con respecto a cada uno de los parámetros desconocidos.

La solución completa para estos problemas [4] está dada por:

$$\begin{aligned}
 T(r, t) = & \frac{hbT_0}{\beta^2 kN} R_0(\beta, r) R_0(\beta, b) e^{-a\beta^2 t} + \frac{hbT_{amb}}{\beta^2 kN} R_0(\beta, r) R_0(\beta, b) (1 - e^{-a\beta^2 t}) \\
 & + \frac{\alpha}{2\pi kN} R_0(\beta, r) R_0(\beta, r_1) \left\{ \frac{P_1}{\alpha\beta^2} (1 - e^{-a\beta^2 t}) + \frac{P_2}{\alpha^2 \beta^4} [\alpha\beta^2 t - (1 - e^{-a\beta^2 t})] \right. \\
 & + \frac{P_3}{\alpha^3 \beta^6} [\alpha^2 \beta^4 t^2 - 2\alpha\beta^2 t + 2(1 - e^{-a\beta^2 t})] \\
 & + \frac{P_4}{\alpha^4 \beta^8} [\alpha^3 \beta^6 t^3 - 3\alpha^2 \beta^4 t^2 + 6\alpha\beta^2 t - 6(1 - e^{-a\beta^2 t})] \\
 & \left. + \frac{P_5}{\alpha^5 \beta^{10}} [\alpha^4 \beta^8 t^4 - 4\alpha^3 \beta^6 t^3 + 12\alpha^2 \beta^4 t^2 - 24\alpha\beta^2 t + 24(1 - e^{-a\beta^2 t})] \right\}
 \end{aligned} \quad (5)$$

donde

$$N = \frac{(h^2 + \beta^2 k^2) b^2 R_0^2(\beta, b)}{2\beta^2 k^2} \quad (6)$$

$$R_0(\beta, r) = J_0(\beta r)$$

para la Placa Caliente, y

$$\begin{aligned}
 T(r, t) = & [bR_0(\beta, b) + dR_0(\beta, d)] \frac{hT_0}{\beta^2 kN} R_0(\beta, r) e^{-a\beta^2 t} \\
 & + [bR_0(\beta, b) + dR_0(\beta, d)] \frac{hT_{amb}}{\beta^2 kN} R_0(\beta, r) (1 - e^{-a\beta^2 t}) \\
 & + \frac{\alpha}{2\pi kN} R_0(\beta, r) R_0(\beta, r_2) \left\{ \frac{P_1}{\alpha\beta^2} (1 - e^{-a\beta^2 t}) + \frac{P_2}{\alpha^2 \beta^4} [\alpha\beta^2 t - (1 - e^{-a\beta^2 t})] \right. \\
 & + \frac{P_3}{\alpha^3 \beta^6} [\alpha^2 \beta^4 t^2 - 2\alpha\beta^2 t + 2(1 - e^{-a\beta^2 t})] \\
 & + \frac{P_4}{\alpha^4 \beta^8} [\alpha^3 \beta^6 t^3 - 3\alpha^2 \beta^4 t^2 + 6\alpha\beta^2 t - 6(1 - e^{-a\beta^2 t})] \\
 & \left. + \frac{P_5}{\alpha^5 \beta^{10}} [\alpha^4 \beta^8 t^4 - 4\alpha^3 \beta^6 t^3 + 12\alpha^2 \beta^4 t^2 - 24\alpha\beta^2 t + 24(1 - e^{-a\beta^2 t})] \right\}
 \end{aligned} \quad (7)$$

donde

$$N = \frac{(h^2 + \beta^2 k^2) [d^2 R_0^2(\beta, d) - b^2 R_0^2(\beta, b)]}{2\beta^2 k^2} \quad (8)$$

$$R_0(\beta, r) = \frac{J_0(\beta r)}{-\beta k J_1(\beta d) + h J_0(\beta d)} - \frac{Y_0(\beta r)}{-\beta k Y_1(\beta d) + h Y_0(\beta d)}$$

### 3 Optimización por Enjambre de Partículas

El comportamiento de un enjambre se puede modelar con unas cuantas reglas sencillas. Los enjambres de peces (banco, cardumen) y de pájaros (bandadas, parvadas) se pueden modelar con tales modelos simples. Por ejemplo, aún si las reglas de comportamiento de cada individuo (agente) son simples, el comportamiento del enjambre puede ser complicado. Reynolds [5] utilizó los siguientes tres *vectores* como reglas simples en sus investigaciones con *boid*:

- Alejarse del agente más cercano.
- Ir hacia el destino.
- Ir hacia el centro del enjambre.

El comportamiento de cada agente dentro del enjambre se puede modelar con simples *vectores*. Los resultados de la investigación son uno de los antecedentes básicos de la PSO.

Boyd y Richerson [6] examinaron el proceso de decisión de los humanos y desarrollaron el concepto de *aprendizaje individual y transmisión cultural*. De acuerdo con su análisis, las personas utilizan dos clases importantes de información en el proceso de decisión. La primera es su *propia experiencia*; esto es, ellos han intentado las diferentes alternativas y conocen cuál estado es el mejor hasta el momento y saben qué tan bueno es. La segunda es la *experiencia de otra persona*; esto es, ellos tienen conocimiento de cómo se han comportado otras personas alrededor de ellos. A saber, ellos saben qué alternativas sus vecinos han encontrado más positivas hasta el momento y qué tan positivo fue el mejor patrón de alternativas. Cada persona toma su decisión utilizando sus propias experiencias y las experiencias de los otros. Los resultados de esta investigación también son uno de los elementos fundamentales básicos de la PSO.

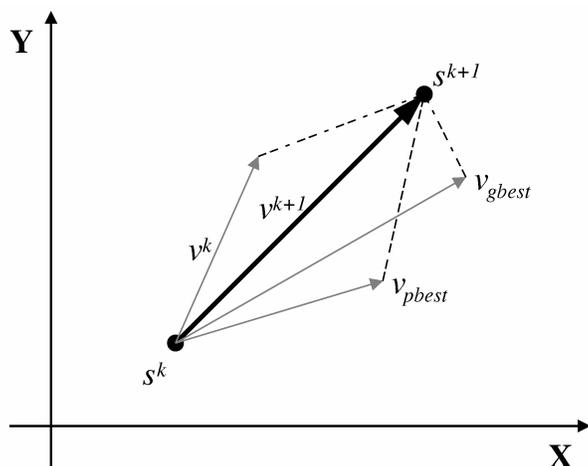


Fig. 2. Concepto de la modificación de un punto de búsqueda en la PSO.

De acuerdo con los antecedentes de la PSO mencionados anteriormente, Kennedy y Eberhart [7] desarrollaron la PSO mediante la simulación de la bandada de pájaros en un espacio bidimensional. La posición de cada agente se representa mediante su posición en los ejes  $x$  y  $y$  y también su velocidad se expresa mediante  $v_x$  (la velocidad en el eje  $x$ ) y  $v_y$  (la velocidad en el eje  $y$ ). La modificación de la posición del agente se lleva a cabo mediante la información de posición y velocidad.

La bandada de pájaros optimiza cierta función objetivo. Cada agente conoce su mejor valor hasta el momento ( $p_{best}$ ) y su posición en  $x$  y  $y$ . Esta información es una analogía de las *experiencias personales* de cada agente. Por otra parte, cada agente conoce el mejor valor ( $g_{best}$ ) de todos los  $p_{best}$  que ha obtenido el grupo hasta el momento. Esta información es una analogía del *conocimiento de cómo se han comportado los otros agentes a su alrededor*. Cada agente intenta modificar su posición utilizando la siguiente información:

- Las posiciones actuales ( $x$ ,  $y$ ).
- Las velocidades actuales ( $v_x$ ,  $v_y$ ).
- La distancia entre la posición actual y su  $p_{best}$ .
- La distancia entre la posición actual y el  $g_{best}$ .

Esta modificación se puede representar mediante el concepto de velocidad (el valor modificado para las posiciones actuales). La velocidad de cada agente se puede modificar mediante la siguiente ecuación:

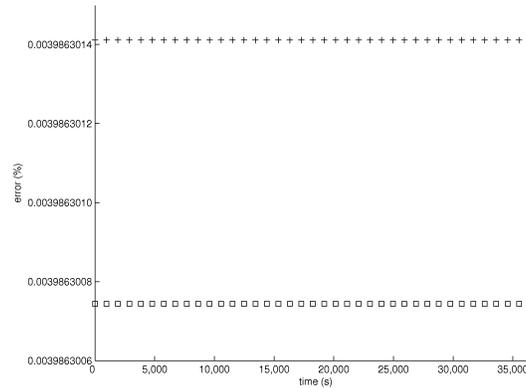
$$v_i^{k+1} = w \cdot v_i^k + c_1 \text{rand}_1 \times (pbest_i - s_i^k) + c_2 \text{rand}_2 \times (gbest - s_i^k) \quad (10)$$

donde  $v_i^k$  es la velocidad del agente  $i$  en la iteración  $k$ ,  $w$  es una función de ponderación,  $c_j$  son coeficientes de ponderación,  $\text{rand}$  es un número aleatorio entre 0 y 1,  $s_i^k$  es la posición actual del agente  $i$  en la iteración  $k$ ,  $pbest_i$  es el  $pbest$  del agente  $i$  y  $gbest$  es el  $gbest$  del grupo.

En otras palabras, la velocidad de un agente se puede cambiar utilizando tres vectores, como en el *boid*. La velocidad se limita normalmente a cierto valor máximo. La PSO que utiliza la Ec. (10) se llama modelo **Gbest**. La siguiente función de ponderación se utiliza normalmente en el modelo **Gbest**:

$$w = w_{\max} - \frac{w_{\max} - w_{\min}}{\text{iter}_{\max}} \times \text{iter} \quad (11)$$

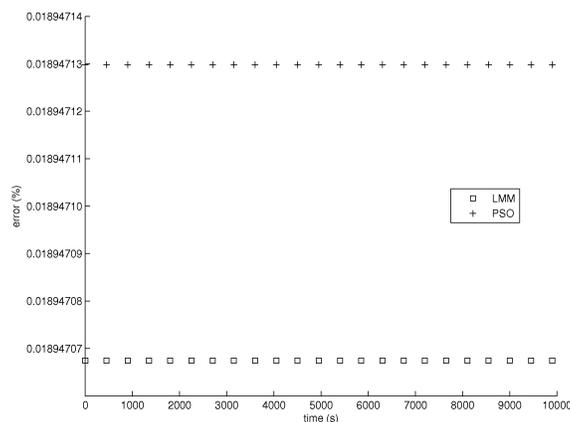
donde  $w_{\max}$  es el peso inicial,  $w_{\min}$  es el peso final,  $\text{iter}_{\max}$  es el número máximo de iteraciones e  $\text{iter}$  es el número actual de iteración.



**Fig. 3.** Errores en la estimación de la fuente de calor para la PSO comparados con el LMM en el caso de la Placa Caliente.

El significado del lado derecho de la Ec. (10) puede explicarse de la siguiente manera [8]: El lado derecho de la Ec. (10) consiste de tres

términos (vectores). El primer término es la velocidad previa del agente. El segundo y el tercer término se utilizan para cambiar la velocidad del agente. Sin estos dos términos, el agente permanecería “volando” en la misma dirección hasta golpear la frontera. Es decir, intenta explorar nuevas áreas y, por lo tanto, el primer término corresponde con la *diversificación* en el proceso de búsqueda. Por otro lado, sin el primer término, la velocidad del agente “volador” se determina únicamente mediante el uso de su posición actual y sus mejores posiciones en su historia. En otras palabras, los agentes intentarán converger a su *pbest* y/o a su *gbest* y, por lo tanto, los términos corresponden con la *intensificación* en el proceso de búsqueda [9]. Como se muestra más adelante, por ejemplo,  $w_{\max}$  y  $w_{\min}$  se ajustan a 0.9 y 0.4 respectivamente. Por consiguiente, al inicio del proceso de búsqueda, la diversificación tiene una ponderación muy alta, mientras que la intensificación está más ponderada al final del proceso de búsqueda en una forma similar al Recocido Simulado (Simulated Annealing, SA). Es decir, se puede calcular una cierta velocidad que gradualmente se acerque a los *pbest* y al *gbest*. La PSO que utiliza las Ecs. (10) y (11) se conoce como *el método de pesos de inercia* (Inertia Weights Approach, IWA).



**Fig. 4.** Errores en la estimación de la fuente de calor para la PSO comparados con el LMM en el caso de la Guarda.

La posición actual (el punto de búsqueda en el espacio solución) puede modificarse mediante la siguiente ecuación:

$$s_i^{k+1} = s_i^k + v_i^{k+1} \quad (12)$$

La Fig. 2 ilustra el concepto de modificación del punto de búsqueda para la PSO. Shi y Eberhart [8, 10] intentaron examinar la selección de los parámetros mencionados anteriormente. De acuerdo con su análisis, son apropiados los siguientes parámetros y sus valores no dependen del problema en consideración:

$$c_i = 2.0, \quad w_{max} = 0.9, \quad w_{min} = 0.4$$

#### 4 Resultados

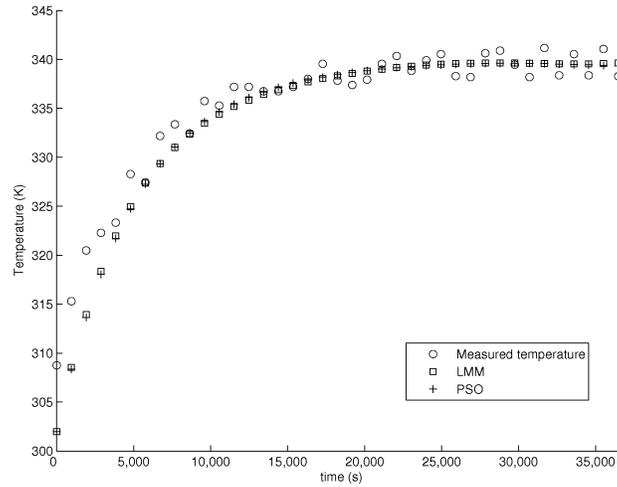
En la Placa Caliente del APCG se utilizó una generación eléctrica de calor de 5 W. Se realizaron mediciones de temperatura cada 1 minuto (durante 624 pasos temporales) en la posición  $r_{med} = 0.0762$  m. La generación de calor que se utilizó en la Guarda fue 3 W. Las mediciones se realizaron cada 30 segundos (durante 345 pasos temporales) en la posición  $r_{med} = 0.1524$  m. El número de partículas utilizado para la optimización fue de 20.

**Tabla 1.** Valor de la menor norma ordinaria de mínimos cuadrados para la Placa Caliente y para la Guarda

Parámetr os	Placa Caliente		Guarda	
	PSO	LMM	PSO	LMM
1	1891.639 4	1891.639 4	200.5644	200.6026
2	1132.177 7	1132.177 7	28.4137	29.1051
3	919.9884	865.1679	13.5919	21.5268
4	758.6564	758.5913	13.5064	17.3220
5	751.0625	733.9622	13.3632	17.5800

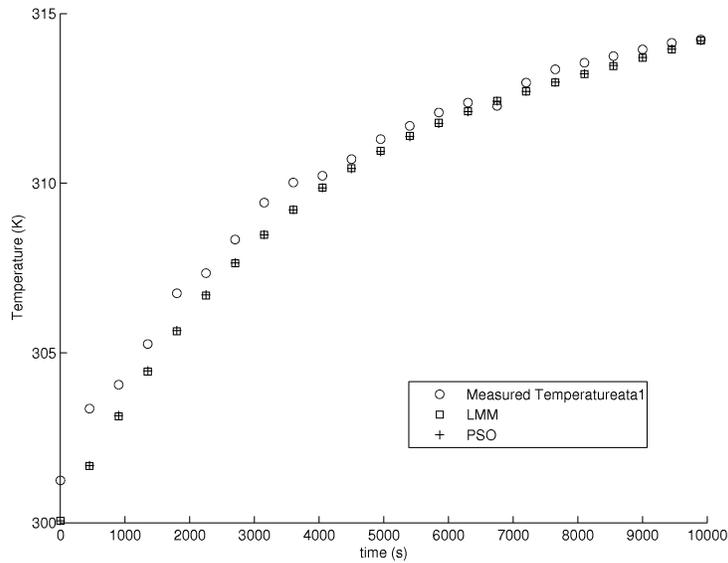
En la Tabla 1 se muestra la norma ordinaria de mínimos cuadrados para el caso de la Placa Caliente y de la Guarda. Se compara con un método tradicional de solución de problemas inversos, el método de Levenberg-Marquardt (LMM). Para el caso de la Placa Caliente se observa un mejor desempeño del LMM conforme aumentamos el número de parámetros. En el caso de la Guarda, la PSO tiene un mejor

desempeño en todos los casos, ya que su norma ordinaria de mínimos cuadrados es la menor.



**Fig. 5.** Campo de temperatura obtenido con la mejor norma ordinaria de mínimos cuadrados con la PSO y el LMM para la Placa Caliente.

En la Tabla 2 se enlistan los parámetros estimados para cada caso tanto para la Placa Caliente como para la Guarda. En la Fig. 3 se muestran los errores para los casos que exhibieron el menor error en la estimación de la fuente de calor para la PSO y el LMM en la Placa Caliente. La Fig. 4 exhibe los mismos resultados para el caso de la Guarda. Las Figs. 5 y 6 muestran los campos de temperaturas obtenidos con la estimación que exhibió la menor norma ordinaria de mínimos cuadrados para la Placa Caliente y para la Guarda, respectivamente.



**Fig. 6.** Campo de temperatura obtenido con la mejor norma ordinaria de mínimos cuadrados con la PSO y el LMM para la Guarda.

## 5 Conclusión

Se ha aplicado una estrategia para resolver problemas inversos de transferencia de calor, la Optimización por Enjambre de Partículas. Se comparó con un método tradicional, el método de Levenberg-Marquardt. El resultado obtenido es satisfactorio ya que los resultados obtenidos con ambos métodos son muy similares y en algunos casos la PSO exhibe mejor desempeño. En especial para la Guarda, la PSO exhibió un mejor desempeño para todos los casos. Sin embargo, es necesario aplicar la Optimización por Enjambre de Partículas a distintos problemas inversos para demostrar su capacidad. Los resultados obtenidos son muy alentadores para seguir trabajando en esta dirección.

## 6 Referencias

- [1] O. M. Alifanov. *Inverse Heat Transfer Problems*. Springer-Verlag. New York, 1994.
- [2] M. N. Ozisik y H. R. B. Orlande. *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*. Taylor & Francis. New York, 2000.
- [3] M. J. Colaco, H. R. B. Orlande y G. S. Dulikravich. "Inverse and Optimization Problems in Heat Transfer". Proc. del 10º Congreso Brasileño de Ingeniería y Ciencias Térmicas, Río de Janeiro, Brasil. 2004.
- [4] O. Cortés. "Aplicación del Método de Levenberg-Marquardt y del Gradiente Conjugado en la estimación de la generación de calor de un Aparato de Placa Caliente con Guarda". Tesis de Maestría, CENIDET, Cuernavaca, Mor. 2004.
- [5] C. Reynolds. "Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model". *Computer Graphics*, **21**:25-34. 1987.
- [6] R. Boyd, P. J. Richerson. *Culture and the evolutionary process*. University of Chicago Press. 1985.
- [7] J. Kennedy, R. Eberhart. "Particle Swarm Optimization". *IEEE International Conference on Neural Networks (ICNN'95)*, IEEE Press. **IV**:1942-1948. 1995.
- [8] Y. Shi, R. Eberhart. "A modified particle swarm optimizer". *IEEE International Conference on Evolutionary Computation (ICEC'98)*. IEEE Press. pp. 69-73. 1998.
- [9] Y. Fukuyama. "Fundamentals of Particle Swarm Optimization Techniques". En *Modern Heuristics Optimization Techniques*. Editado por K. Y. Lee y M. A. El-Sharkawi. 2008.
- [10] Y. Shi, R. Eberhart. "Parameter Selection in Particle Swarm Optimization". *Proceedings of the Seventh Annual Conference on Evolutionary Programming*. San Diego: MIT Press. 1998.