Modelo Eléctrico del Cátodo de una Descarga de Alta Presión de Sodio

José Luis Tapia Fabela[1], Yulia Nikolaevna Ledeneva[1], René Arnulfo García Hernández[1].

[1]Departmento de Ingeniería de Software
Universidad Autónoma del Estado de México
Unidad Académica Profesional Tianguistenco
Paraje del Tejocote, San Pedro Tlaltizapan,
Tianguistenco Estado de México, C.P. 52640.
jltapiaf@uaemex.mx

Resumen. En este trabajo se presenta el desarrollo de un modelo eléctrico del cátodo (ECM) de una descarga HPS basado en las ecuaciones físicas que describen su comportamiento eléctrico. El modelo propuesto evalúa la caída de voltaje instantánea en la cubierta del cátodo (caída de voltaje predominante en una lámpara HPS) y la distribución de temperatura dentro del mismo usando como parámetros de entrada la geometría del cátodo y la corriente de la descarga. El ECM se basa en la ecuación del transporte de calor del electrodo; dicha ecuación fue resuelta empleando el método de elementos finitos. Los resultados obtenidos fueron comparados con los reportados en la literatura, encontrándose una buena correspondencia. Por lo anterior, se concluye que el ECM es una herramienta que ayuda a entender la interacción entre la descarga y el cátodo.

1. Introducción

Los electrodos de una lámpara de descarga gaseosa constituyen la interfaz entre la columna positiva y el circuito electrónico. Una fracción importante de la potencia eléctrica suministrada a la lámpara se disipa en los electrodos resultando en una pérdida de potencia para efectos de iluminación. Por lo tanto, resulta esencial comprender la interacción entre los electrodos y la columna positiva para tratar de reducir las pérdidas de energía y mejorar el desempeño de la lámpara.

El estudio experimental de la interacción entre el cátodo y la columna positiva de una descarga resulta difícil de realizar usando lámparas comerciales porque éstas no cuentan con terminales que permitan medir la caída de potencial en los electrodos, así que es necesario una disposición experimental sofisticada para realizar las mediciones. Además, en algunos casos las dimensiones de las descargas son tan pequeñas, que resulta difícil realizar las mediciones. Consecuentemente, un modelo numérico de la interacción plasma-cátodo representa una buena opción para llevar a cabo dicho estudio. En este trabajo se propone un modelo eléctrico del cátodo ECM de una descarga, el cual es capaz de predecir la caída de voltaje a través de la cubierta

M.A Cruz-Chávez, J.C Zavala Díaz(Eds):CICos2009, ISBN:978-607-00-1970-8, pp. 210 - 220, 2009.

del cátodo bajo diferentes frecuencias y formas de onda de la corriente de alimentación. El ECM se basa en la ecuación del transporte de calor en el electrodo y la ecuación de las pérdidas eléctricas en el frente del electrodo propuesta por J.J. de Groot & Van Vlient [Groot, 1986]. Esta ecuación relaciona el gradiente de temperatura en el frente del electrodo (superficie activa) con la caída de potencial en el mismo.

El ECM fue desarrollado en Matlab aplicando el método de solución de elementos finitos. El modelo propuesto está basado en ecuaciones físicas que describen el comportamiento eléctrico del cátodo y por lo tanto es válido bajo diversas condiciones de operación. El usuario del ECM solo necesita introducir la amplitud, frecuencia y forma de onda de la corriente de la columna positiva, y para una geometría del cátodo dada, el modelo predecirá la caída de voltaje instantánea en el cátodo. Además, usando el ECM es posible calcular la distribución de temperatura dentro del cátodo. Esto resulta de gran interés porque la vida útil de una lámpara HPS está fuertemente relacionada con la distribución de temperatura en los electrodos [Tielemans, 1983].

2. Geometría del Cátodo

El cátodo de una descarga HPS alcanza una alta temperatura durante su funcionamiento, por lo que éste debe ser elaborado de un material refractario, con un punto de fusión alto. La geometría del cátodo de una descarga HPS se muestra en la figura 1.

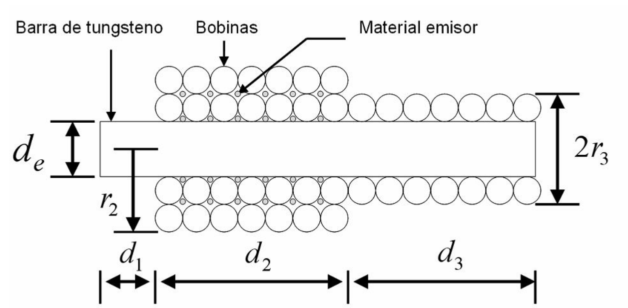

Fig. 1. Sección transversal del cátodo de una lámpara de descarga HPS [Fabela, 2007].

El cátodo de una descarga HPS está compuesto por una barra de tungsteno, envuelta con una o dos bobinas del mismo material; lo anterior con el objetivo de incrementar la superficie radiativa. Entre las bobinas se deposita una mezcla activadora de bario que permite una mayor emisión de electrones.

3. Modelo Teórico

De acuerdo con J.J Groot & van Vlient [Groot, 1986], las pérdidas eléctricas (P_k) en el frente del cátodo ($y = 0$) de una descarga HPS están definidas por la ecuación:

$$P_k = \frac{1}{4}\pi\left(d_e\right)^{3/2} K\left(\frac{dT}{dy}\right)_{y=0} \tag{1}$$

donde: d_e simboliza el diámetro en el frente del electrodo, K es la conductividad térmica del tungsteno, $y = z(d_e^{-1/2})$ representa la coordenada axial reducida con z igual a la coordenada axial y T es la temperatura del electrodo. Como se puede observar en la ecuación (1), la caída de potencial en el cátodo está relacionada con el gradiente de temperatura en su superficie activa. Po lo que para calcular las pérdidas eléctricas en el electrodo de una descarga, es necesario obtener la distribución de temperatura a través del mismo usando una determinada corriente eléctrica y condiciones de frontera. Una vez que se conoce la distribución de temperatura es posible especificar el gradiente de temperatura en la superficie activa del electrodo.

3.1 Cálculo de la Temperatura en la Superficie Activa del Cátodo

La emisión termo-iónica de electrones, en el caso del cátodo de una descarga HPS, se ve favorecida con el campo eléctrico aplicado y por la presencia de la capa activadora, que reduce la función de trabajo en la superficie del electrodo.

En este estudio se asume que la densidad de corriente en la superficie activa del cátodo (j) está definida por: $j = j_i + j_e$ donde j_i representa la densidad de corriente iónica y j_e es la densidad de corriente de electrones compuesta por: la emisión secundaria ($j_e^{\sec}$) relacionada con el proceso γ-Townsed y por la emisión termo-iónica corregida por el campo eléctrico (j_e^{th}) (descrita en la ecuación de Richardson-Dushman ecuación (4)). Por lo tanto: $j_e = j_e^{th} + j_e^{\sec}$. De acuerdo con [Sherman, 1977], la emisión de electrones secundarios debida al bombardeo de iones de sodio sobre el cátodo de tungsteno es igual al 1% de los iones que alcanzan el cátodo. Usando el coeficiente β-Waymouth, el cual establece una relación entre la densidad de corriente iónica j_i y electrónica j_e en la cubierta del cátodo de una descarga HPS [Waymouth, 1982] tenemos:

$$\beta = \frac{j_i}{j_e} = \frac{j_i}{j_e^{th} + j_e^{\sec}} \tag{2}$$

$$j_e^{\sec} = \gamma \; j_i \tag{3}$$

$$j_e^{th} = A\,T^2 \; \exp\left(\frac{e \;\; \varphi(E_k)}{k \;\; T}\right) \tag{4}$$

donde: $A = \left(4\,\pi\; e\, m_e\; k^2\right)/h^3 = 1.2\times10^6 \text{ A m}^{-2}\text{ K}^{-2}$, simboliza la constante de Richardson-Dushman [Flesch, 2006], e y m_e representan la carga y la masa del electrón respectivamente, h es la constante de Planck, k es la constante de Boltzmann, E_k corresponde al campo eléctrico aplicado en la superficie del cátodo y se relaciona con la caída de potencial (V_k) mediante la ecuación de MacKeown [Mackeown, 1929]: $E_k^2 \approx \left(4\; j_i/\varepsilon_0\right)\sqrt{m_i\; V_k/2e}$ donde m_i representa la masa iónica del sodio, ε_0 es igual a la constante dieléctrica del vacío, y:

$$\varphi(E_k) = \varphi_0 - \Delta\varphi(E_k); \qquad \Delta\varphi(E_k) = \sqrt{\frac{e\,E_k}{4\,\pi\,\varepsilon_0}} \tag{5}$$

Aquí, φ_0 es la función de trabajo para el tungsteno y $\Delta\varphi$ simboliza la corrección Schottky para la función de trabajo del tungsteno.

Para calcular la temperatura en la superficie activa del cátodo de una descarga HPS, se asume que el acoplamiento entre el arco y el cátodo es de modo difuso [Lichtenberg, 2002]. Cuando el cátodo opera en modo difuso, el plasma cubre la superficie activa del electrodo y sus lados. En el presente estudio se supone que únicamente la superficie activa del cátodo participa en la emisión termo-iónica. Las otras zonas del electrodo son consideradas inactivas desde el punto de vista de emisión electrónica [Lichtenberg, 2002].

Tomando en cuenta los argumentos anteriores y substituyendo las ecuaciones (2) y (3), en la ecuación (4), es posible derivar la siguiente ecuación que relaciona la densidad total de corriente con la temperatura en la superficie activa del cátodo (T_{act}):

$$j = \left(\frac{1+\beta}{1-\gamma\;\beta}\right) A\,T_{act}^2 \;\exp\left(\frac{e\,\varphi(E_k)}{k\,T_{act}}\right) \tag{6}$$

Resolviendo la ecuación anterior se puede deducir la temperatura en la superficie activa del cátodo que produce una densidad de corriente igual a la corriente de la descarga. De acuerdo con Waymout [Waymouth, 1982], el valor del coeficiente β es considerado como el 20% de la densidad de corriente de electrones.

3.2 Ecuación del Transporte de Calor del Electrodo

La distribución de temperatura dentro del cátodo y en su superficie activa puede obtenerse resolviendo la ecuación del transporte de calor del electrodo (ecuación (7)), usando las condiciones de frontera dadas (ver sección 3.3). La ecuación (7) describe la variación de la cantidad de calor por unidad de volumen en el electrodo [Cristea, 2003]:

$$\rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t} = S + \nabla\{K\, \nabla T\} \tag{7}$$

donde: ρ representa la densidad, c_p la capacidad calorífica específica, T es la temperatura del electrodo, t denota la dependencia del tiempo de la ecuación y K simboliza la conductividad térmica del tungsteno. El término S de la ecuación (7) representa la potencia disipada en el electrodo por unidad de volumen debida al efecto Joule y es dada por la ecuación [Cristea, 2003]:

$$S = \rho_e j^2 \tag{8}$$

Aquí j representa la densidad de corriente de la descarga y ρ_e la conductividad eléctrica del electrodo. El calor producido en el cuerpo del electrodo debido a la circulación de la corriente de la descarga a través del mismo, eleva su temperatura y por consiguiente el valor de la conductividad eléctrica ρ_e cambia; este cambio está determinado por la relación [Cristea, 2003]:

$$\rho_e(T) = \rho_o\left\{1 + \alpha\left[T - T_{act}\right]\right\} \tag{9}$$

Las constantes ρ_0 y α dependen del material del cual está constituido el cátodo. Para el caso del tungsteno sus valores se muestran en la Tabla 1. Además, la condición suplementaria siguiente (para la corriente total de la descarga) debe ser verificada:

$$2\,\pi \int_0^{r_0} j\, r\, dr = I \tag{10}$$

donde: $r_0 = d_e/2$ es el radio del cátodo, r es la coordenada radial e I representa la corriente en la descarga.

Tabla 1. Coeficientes del tungsteno [Cristea, 2003]

Símbolo	Valor	Unidades
ρ	19300	[kg m^{-3}]
c_p	133	[J kg^{-1} K^{-1}]
K	776/(T0.256)	[W m^{-1} K^{-1}]
ρ_0	5.28X10^{-8}	[Ω^{-1}m^{-1}]
α	6.76X10^{-3}	[K^{-1}]

3.3 Condiciones de Frontera

El frente (superficie activa) y el extremo posterior del cátodo fueron caracterizados con una condición de frontera de Dirichlet. La temperatura en el extremo posterior del cátodo de una descarga HPS similar a la modelada en este estudio fue medida experimentalmente por Cristea $T_{end} = 600K$ [Cristea, 2003]; en el presente estudio, ante la imposibilidad de realizar esta medición, se usó el valor reportado. La temperatura en la superficie activa del cátodo T_{act} se obtiene al resolver la ecuación (6) para una determinada densidad de corriente de la descarga. Las condiciones de frontera en los bordes del cátodo se definieron como condiciones de Neumann; el significado físico de estas condiciones es el intercambio continuo del flujo energético (radiación, conducción, convección) entre el cátodo y el medio adyacente. La ecuación que define la condición de frontera es [Cristea, 2003]:

$$K(T_b)\left(\frac{\partial T}{\partial \bar{n}}\right)_b = \bar{n}\ \left[\zeta\ (T_b - T_{amb}) + \varepsilon(T_b)\ \sigma(T_b^4 - \right. \tag{11}$$

donde: T_b representa la temperatura del cátodo en el borde, T_{amb} es la temperatura ambiental, ζ es el coeficiente de convección, ε simboliza la emisividad del tungsteno y σ es la constante de Stefan Boltzmann. El término $(\partial T/\partial \bar{n})_b$ representa la derivada de la temperatura en dirección normal $\bar{n}$ a la superficie activa del cátodo.

4. Resultados y Discusión

El procedimiento empleado para calcular las características eléctricas del cátodo se resume en el diagrama de flujo mostrado en la figura 2. En este diagrama los parámetros de entrada y salida son representados mediante rectángulos redondeados para diferenciarlos de los rectángulos que identifican a los pasos de proceso.

Como se puede ver, para obtener la temperatura en la superficie activa del electrodo es necesario conocer la caída de voltaje inicial en el cátodo y la corriente de la descarga. Con la temperatura obtenida es posible calcular la distribución de temperatura a través del electrodo, y continuando con los pasos subsecuentes se puede obtener una nueva caída en el cátodo que cumpla con las condiciones impuestas. El proceso se repite hasta que el programa converge.

La ecuación (7) fue resuelta en Matlab usando el método de elementos finitos. Las dimensiones del cátodo empleado fueron (ver figura 1): d_e =1 mm, r_2 =1.5 mm, r_3 =1.0 mm, d_1 =1.5 mm, d_2 =3 mm, d_3 =5 mm. Los resultados obtenidos se presentan a continuación.

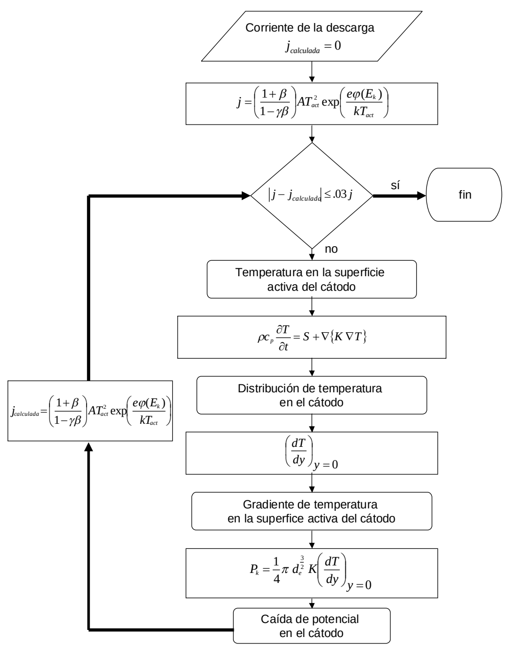

Fig. 2. Solución estructurada para calcular la caída de voltaje en la cubierta del cátodo de una descarga HPS [Fabela, 2007].

4.1 Cálculo de la Temperatura en la Superficie Activa del Cátodo

La temperatura en la superficie activa del cátodo se obtiene mediante la ecuación (6). La solución fue conseguida por medio de un proceso iterativo que cambia la temperatura en la superficie activa del cátodo y calcula la corriente necesaria para alcanzar dicha temperatura, el proceso finaliza cuando se converge con la corriente impuesta por la descarga. En otras palabras, la solución de la ecuación (6) es una temperatura que produce una densidad de corriente eléctrica igual a la de la descarga. Los resultados del proceso anterior, para una densidad de corriente de la descarga de 1.2732×106 A/m^2 en una lámpara HPS (400 W), se muestran en la figura 3. La temperatura obtenida en la superficie activa alcanza los 1650 K.

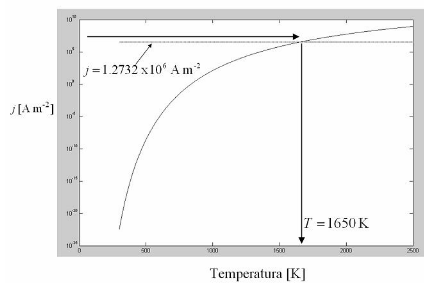

Fig. 3. Solución gráfica para la temperatura de la superficie activa del cátodo usando una densidad de corriente de la descarga de $j = 1.2732\mathrm{x}10^{6}\,\mathrm{Am}^{-2}$.

4.2 Cálculo de la Distribución de Temperatura en el Electrodo

En la figura 4 se presenta la distribución de temperatura a través del cátodo de una descarga HPS, obtenida para una temperatura en la superficie activa de $T_{\mathrm{act}} = 1650\,\mathrm{K}$ la cual corresponde a una corriente en la descarga de 4 A. Como se puede observar, la distribución de temperatura presenta simetría axial. Considerando que en modo difuso la tasa de agotamiento de la capa emisiva del cátodo es la misma en todos los puntos, entonces se puede suponer que en este modo de operación el cátodo funcionará apropiadamente hasta la conclusión de la capa emisiva. La distribución de temperatura dentro del cátodo de una descarga resulta de gran interés debido a que la vida útil de las lámparas HPS está íntimamente relacionada con dicha distribución [Flesch, 2006].

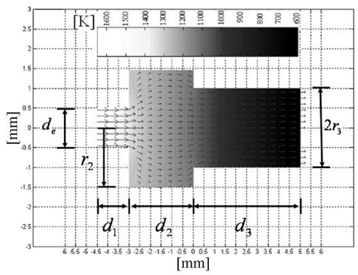

Fig. 4. Distribución de temperatura (escala de grises) y flujo de calor (flechas) en el cátodo de un descarga HPS.

4.3 Cálculo del Gradiente en la Superficie Activa del Cátodo

Una vez que se cuenta con la distribución de temperatura en el interior del cátodo, es posible calcular el gradiente de temperatura en el frente del electrodo (superficie activa). En la figura 5 se muestra el perfil de temperatura en el centro del cátodo de una descarga HPS. En el frente del electrodo la temperatura es de 1650 K; sin embargo, la temperatura decrece rápidamente cuando se aproximan a la parte posterior del electrodo alcanzando un valor de 600 K. El decremento de temperatura es debido a las pérdidas por conducción y radiación del cátodo definidas en las ecuaciones (7) y (11).

Asimismo, en la figura 5 se muestra el gradiente de temperatura en la superficie activa del electrodo. El perfil de temperatura fue comparado con las referencias [Cristea, 2003], se encontró una buena correspondencia en cuanto a la pendiente del perfil en los primeros 5 mm; sin embargo, existe una notable diferencia en la parte posterior del electrodo. Lo anterior se explica debido al hecho de que para el cálculo del perfil de temperatura, los autores de las referencias anteriormente citadas, consideran que el electrodo es una barra de longitud infinita, y el cálculo lo realizan de manera unidimensional.

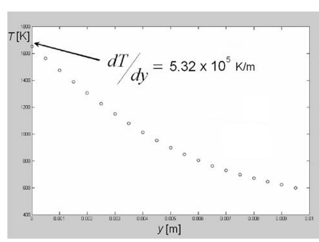

Fig. 5. Gradiente de temperatura en la parte frontal del cátodo usando una corriente senoidal de 4 A de 60 Hz.

Usando el gradiente de temperatura de la superficie activa del cátodo, obtenido en la sección previa, se pueden calcular las pérdidas eléctricas y consecuentemente se logra determinar la caída de potencial en el cátodo. En la figura 6 se resume el procedimiento adoptado en este estudio para determinar la influencia de la frecuencia y forma de onda de la corriente de la descarga en la operación del cátodo

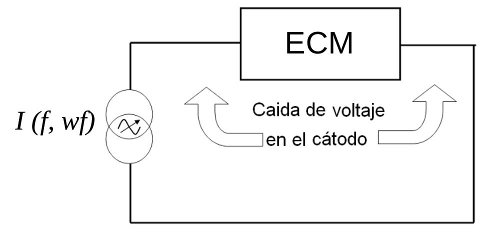

Fig. 6. Diagrama del modelo eléctrico del cátodo (ECM) propuesto.

Como se puede observar, para realizar el estudio descrito, se aplica una fuente de corriente I con frecuencia (f) y forma de onda (wf) al modelo propuesto ECM.

En la Tabla 2 se reportan algunos resultados típicos obtenidos para cátodos de tungsteno en descargas HPS, lo anterior con el propósito de validar el modelo desarrollado. De la Tabla 2 es importante notar un ligero incremento en la caída de voltaje al aumentar la frecuencia. Las diferencias que aparecen con las referencias consultadas son debidas probablemente a las simplificaciones consideradas en el modelo propuesto.

Tabla 2. Caída de voltaje típica obtenida para cátodos de tungsteno en descargas HPS.

Material del cátodo	Gas	Corriente [A]	Forma de onda de la corriente	Frecuencia [Hz]	Caída de voltaje en el cátodo [V] (pico)		Caída de voltaje en el cátodo[V] (pico)	
Tungsteno	sodio	4.45	sinusoidal	60	17	[Groot, 1986]	16.4	ECM
Tungsteno	sodio	4	sinusoidal	60	20	[Waymouth, 1982]	19.5	ECM
Tungsteno	sodio	4.45	sinusoidal	40000	24.6	[Groot, 1986]	22	ECM
Tungsteno	sodio	4	sinusoidal	40000	25.3	[Waymouth, 1982]	24	ECM

5 Conclusiones

En el presente trabajo se diseñó un modelo eléctrico del cátodo de una descarga HPS dispuesto para el diseño de balastras electrónicas. El modelo se basa en la ecuación de la transferencia de calor y la ecuación de las pérdidas eléctricas del electrodo. Fué implementado en Matlab mediante el uso del método de elementos finitos. Debido a que el modelo propuesto está basado en ecuaciones físicas que describen el comportamiento eléctrico del cátodo, los resultados obtenidos con este modelo son validos sobre distintas condiciones de operación. El ECM es capaz de predecir la caída de voltaje en la cubierta del electrodo, bajo diferentes frecuencias y formas de onda de la corriente de alimentación. Usando el ECM es posible determinar la distribución de temperatura en el interior del cátodo, lo cual es de gran interés debido a que la vida útil de una lámpara HPS está fuertemente relacionada con ésta. Los resultados obtenidos usando el modelo fueron comparados con los reportados en la literatura y se encontró que el modelo predice de una manera satisfactoria los parámetros eléctricos en el cátodo de una descarga HPS. Por lo anterior se puede concluir que el ECM es una herramienta que ayuda a entender la interacción entre la descarga y el cátodo con el objetivo de mejorar el diseño de balastras electrónicas.

6. Referencias

1. Cristea M. y Zissis G. (2003).Thin barium layer formation and its influence on tungsten electrode arc attachment modes in HID lamps. Journal of Optoelectronics and Advanced Materials, 5: 511-520.
2. Fabela J. L. T., Pacheco-Sotelo J. O., Pacheco M. P., Benitez-Read J. S., Lopez-Callejas R., Zissis G., Bhosle S. (2007). Modeling the voltage drop across the cathode sheath in HPS. IEEE Trans. Plasma Sci., 35: 1104-1110.
3. Flesch P. (2006). Light and Light Sources, High-Intensity Discharge Lamps. Berlin: Springer. Germany.
4. De Groot J. J, van Vliet J. A. J. M. (1986). The high pressure sodium lamp. MacMillan Education, Deventer.
5. Lichtenberg S., Nandelstädt D., Dabringhausen L., Redwitz M., Luhmann J. y Mentel J. (2002). Observation of different modes of cathodic arc attachment to HID electrodes in a model lamp. J. Phys. D: Appl. Phys., 35: 1648-1656.
6. Mackeown S. S. (1929). The cathode drop in an electric arc. Physical Review, 34: 611-614.
7. Sherman J. C. (1977). Secondary electron emission by multiply charged ions and its magnitude in vacuum arcs. J. Phys. D: Appl. Phys., 10: 355-359.
8. Tielemans P., Oostvogels F. (1983). Electrode temperature in high pressure gas discharge lamps. Philips J. Res., Vol. 38, pp. 214-223.
9. Waymouth J. F. (1982). Analysis of Cathode-Spot Behavior in High-Pressure Discharge Lamps. J. Light & Vis. Env., 6: 53-64.