

# Optimización del Tráfico Vehicular en la Intersección de dos Calles Urbanas

Ana-Virginia Contreras<sup>1</sup>, María-Elena Lárraga<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Cuernavaca, Mor., México

avcg@buzon.uaem.mx

<sup>2</sup>Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, 04510, México, D.F.

mlarragar@iingen.unam.mx

**Abstract.** En este artículo se presenta un modelo estocástico nuevo para la intersección de dos calles urbanas, con dos carriles cada una. El flujo vehicular en la intersección se controla por un conjunto de semáforos que operan bajo un esquema de tiempo fijo. La dinámica vehicular se simula dentro del marco de los modelos basados en autómatas celulares probabilistas. El objetivo es optimizar el flujo vehicular en el cruce de las calles a través de la minimización del tiempo de espera de los vehículos por ciclo del semáforo. Para este propósito, se evalúa el tiempo de espera experimentado por los vehículos que integran el flujo vehicular en cada intersección durante intervalos de tiempo específicos. Con base en los resultados obtenidos, se determina el tiempo de señalización óptimo de los semáforos para minimizar el tiempo total de espera para ambas calles y así, optimizar el flujo vehicular.

**Keywords:** Optimización de Tráfico Vehicular, Autómatas Celulares

## 1 Introducción

Durante los últimos cincuenta años, se han desarrollado una amplia gama de teorías de flujo de tráfico y modelos como herramientas para solucionar los problemas económicos y sociales que se originan como consecuencia de la demanda vehicular alta [1]. Las investigaciones se orientan a optimizar la eficiencia de los sistemas de tránsito existentes y de esta forma incrementar la capacidad vehicular. Recientemente, modelos discretos como los Autómatas Celulares (AC) han proporcionado un marco teórico significativo para la disciplina de la modelación de tráfico vehicular [2, 6, 7]. Los AC son sistemas dinámicos discretos en todas sus componentes: espacio, tiempo y variables de estado. Los AC son útiles para modelar fenómenos dinámicos complejos, que se modelan normalmente a través de ecuaciones en derivadas parciales, y para los cuales no existe solución analítica explícita. Aplicados en la modelación del tráfico vehicular, los AC se plantean como un paradigma de modelación microscópico alternativo al convencional (macroscópico) que se basa en la especificación de ecuaciones diferenciales en un contexto continuo. A nivel

microscópico, el énfasis del modelado está en cada vehículo que circula por una vía de transporte superficial y su interacción. Por lo tanto, los modelos para tráfico vehicular basados en AC permiten capturar dinámicas a un micro-nivel y propagarlas a un desempeño de macro-nivel; es decir, permiten representar las interacciones entre los vehículos individuales y relacionar esta interacción a mediciones macroscópicas como el flujo vehicular, el tiempo de viaje y la velocidad promedio.

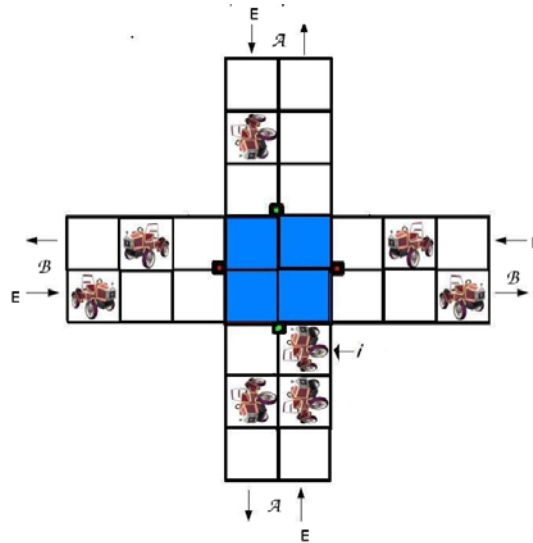
A pesar de la búsqueda de nuevos modelos para mejorar el desempeño del tránsito vehicular y aquellos realizados por los ingenieros de tráfico, la señalización óptima de las redes de tránsito urbano no ha sido totalmente comprendida. En la mayoría de los estudios realizados, el interés principal se ha enfocado en las estrategias globales de la red de tráfico y con frecuencia, el papel que juega el desempeño del tráfico en una intersección de calles aislada no se ha considerado. Sin embargo, las intersecciones juegan un papel importante en el desempeño de una red de transporte urbana, ya que representan el punto de convergencia del tránsito vehicular. Además, las intersecciones son las causantes de los cuellos de botella de una red urbana y determinantes críticos de la capacidad vehicular, la eficiencia y la seguridad de la misma. Esto se debe a que una intersección comprende el área donde dos o más calles se unen (denominado cruce) y todo el espacio destinado a facilitar los movimientos de los vehículos que circulan por ella. En particular, el estudio de una intersección de dos calles (aquí llamada intersección aislada) es un ingrediente substancial para lograr la optimización global del flujo vehicular en una red urbana.

En este trabajo, se analiza el estado del tráfico en una intersección aislada de dos calles (cruce recto), con dos carriles cada una. El flujo vehicular se controla mediante semáforos que operan bajo un esquema de tiempo fijo. En este tipo de esquema, se elige cierta cantidad de tiempo para el ciclo de duración de un semáforo y sus respectivas fases (verde, amarilla y roja). Para simular la dinámica vehicular se utiliza un autómata celular probabilista. El objetivo es minimizar el tiempo de espera de los vehículos en una cola que se origina en una intersección con la finalidad de optimizar su flujo vehicular y el desempeño de la misma. El resto de este trabajo está organizado de la siguiente manera. En la Sec. 2, se describe el modelo utilizado para simular una intersección aislada. Los resultados obtenidos de la investigación se presentan en la Sec. 3. Se presentan resultados tanto para un flujo vehicular de entrada simétrico (mismo flujo de entrada en las dos calles que se intersectan) como flujo de entrada asimétrico (flujo de entrada diferente). Para ambos casos se analizan los resultados obtenidos de la simulación computacional del modelo que se propone y se presenta una comparación con resultados obtenidos en forma analítica. Por último, se presentan las conclusiones del trabajo.

## 2 Formulación del Modelo

Un cruce se forma en la intersección de dos calles. Dependiendo del tipo de cruce se definen los distintos tipos de movimiento que permiten que los vehículos atraviesen un cruce sin conflictos. En este trabajo, se considera un cruce de dos calles perpendiculares, cada una de ellas compuesta de dos carriles cuyo flujo vehicular se orienta en sentidos opuestos. Para hacer un modelo lo más parecido al

comportamiento del tránsito vehicular real, el número de vehículos presentes en la intersección varía en el tiempo, es decir, se trata de un sistema de frontera abierta. De aquí en adelante a la calle vertical se le referirá  $A$  y a la calle horizontal  $B$ . Los vehículos arriban en cada uno de los carriles que componen el cruce de las calles (en los cuatro accesos de entrada) en el sentido del flujo vehicular. Para controlar el flujo vehicular en la intersección se consideran semáforos sincronizados que operan bajo un esquema de tiempo fijo (ver Fig. 1).



**Fig. 1.** Intersección aislada de dos carriles. Los vehículos de la calle  $A$  se desplazan de Norte a Sur y de Sur a Norte, en sus respectivos carriles; mientras que en la calle  $B$  los vehículos viajan de Este a Oeste y viceversa.

Como punto inicial de la investigación, el modelo considera vehículos de la misma longitud que nunca cambian de carril (no se permite el rebase entre los vehículos). Tampoco se permite que un vehículo gire al llegar a la intersección para cambiar su dirección de flujo vehicular (destino). La dinámica de los vehículos del sistema se basa en una modificación del modelo de Nagel-Schreckenberg (aquí referido como NaSch) para tráfico vehicular de carreteras<sup>1</sup>. Por lo tanto, el espacio y el tiempo del modelo se discretizan. De tal forma que cada carril se divide en  $L_t$  celdas del mismo tamaño cuya longitud,  $\Delta x$ , corresponde a 6 m., que equivale a la longitud promedio de un automóvil más la distancia que existe entre vehículos en un congestionamiento. Debido a que se consideran carriles del mismo tamaño tanto antes como después de la intersección, la longitud total de cada carril es  $L_t = 2 * L + 2$ , donde el 2 es resultado del número de celdas que se cruzan en la intersección (igual a la cantidad de carriles que tiene la calle con que se intersecta un carril) y  $L$  es la longitud en celdas de un carril

<sup>1</sup> Este fue el primero que mostró que los AC eran adecuados para simular el desempeño del tránsito vehicular [8].

desde su inicio hasta el cruce. El tiempo se discretiza en pasos de tiempo  $\Delta t$ . Cada paso de tiempo, una celda puede estar vacía u ocupada por exactamente un vehículo. Debido a la discretización de espacio y tiempo, cada vehículo puede tomar los valores de velocidad discretos  $1, 2, \dots, v_{\max}$ , donde  $v_{\max}$  es la velocidad límite. Así, las unidades de distancia, velocidad y tiempo se normalizan con respecto a la longitud de cada celda,  $\Delta x$  y el paso de tiempo  $\Delta t$ . Por lo tanto, las unidades para la posición  $x$  denotan el número de celda de la red; para la velocidad  $v$ , el número de celdas por unidad de tiempo y para el tiempo  $t$ , el número de pasos de tiempo.

En el modelo que aquí se propone, cada paso de tiempo el estado del sistema se caracteriza por las posiciones y velocidades de los vehículos, así como el estado de la fase del semáforo en cada calle (sólo se consideran las fases roja y verde del semáforo). Todos los aspectos antes mencionados para la dinámica vehicular se incorporan al modelo propuesto mediante un conjunto de reglas para el  $n$ -ésimo vehículo caracterizado por su posición  $x_n(t)$  y su velocidad  $v_n(t)$ , al tiempo  $t$ . Los vehículos en cada carril se enumeran en la dirección de conducción, es decir, el vehículo  $n+1$  precede al vehículo  $n$ . Entonces, el espaciamiento entre vehículos consecutivos (número de celdas vacías) es  $d_n = x_{n+1}(t) - x_n(t)$ . La distancia (en celdas) de un vehículo al cruce de la intersección se denota  $d_{c_n}$ <sup>2</sup>. De esta forma, el estado de los vehículos al paso del tiempo  $t+1$  se obtiene del estado al tiempo  $t$  mediante la aplicación de las siguientes reglas de AC a todos los vehículos (en paralelo).

**R1: Aceleración**

$$v_n(t+1) \rightarrow \min(v_n(t) + 1, v_{\max})$$

**R2: Desaceleración.** Con base en la posición de otros vehículos y el estado actual del semáforo  $e_s$  (1:rojo, 0:verde).

Si ( $e_s = 1$  (rojo)) ó ( $e_s = 0$  y  $x_n \leq L$ ) y existe un vehículo en el cruce que pertenezca a otro carril (obstrucción) entonces

$$v_n(t+1) \rightarrow \min(v_n, d_n, d_{c_n})$$

Si  $e_s = 0$  (verde) y no existe un vehículo en el cruce que pertenezca a otro carril entonces

$$v_n(t+1) \rightarrow \min(v_n, d_n)$$

**R3: Frenado aleatorio.**

$$v_n(t+1) \rightarrow \max(v_n - 1, 0)$$

con probabilidad  $R$

**R4: Movimiento de vehículos.**

$$x_n(t+1) \rightarrow x_n + v_n$$

Las reglas R1 a R3 se diseñaron para cambiar la velocidad de los vehículos; la regla R4 cambia su posición. De acuerdo a esto, el cambio de estado se divide en dos etapas, primero la velocidad y segundo la posición. En lo siguiente se discuten las reglas de cambio de estado una a una. La regla de R1 determina el deseo de los conductores de alcanzar la máxima velocidad siempre y cuando esto les sea posible. La regla R2 produce que un conductor desacelere cuando el espacio que separa su vehículo del vehículo de enfrente llega a ser pequeño y/o el estado del semáforo, la distancia que lo separa del cruce y las condiciones del mismo así lo requieren para mantener seguridad. La regla R3 simula cualquier efecto que ocasione que en forma

<sup>2</sup> Si el vehículo se encuentra después del cruce  $d_{c_n} = \infty$

inesperada un conductor disminuya su velocidad, como el estado físico de la calle y/o las condiciones del clima, que generan que los conductores desaceleren sorpresivamente. Por último, la regla R4 actualiza la posición de los vehículos de acuerdo a la velocidad adquirida mediante la aplicación de las reglas R1-R3.

La principal modificación que se realizó al modelo NaSch para adaptarlo para la modelación del tráfico urbano se llevó a cabo en la regla R2. En esta regla, la desaceleración de un vehículo depende principalmente del estado actual del semáforo que le corresponde (fase verde o fase roja), su posición en el carril y el espaciamiento al vehículo precedente. Durante la fase roja, la velocidad de un vehículo se determina por su distancia al vehículo precedente, su distancia al cruce y su velocidad actual. Por otra parte, durante la fase verde del semáforo de un carril determinado, el  $n$ -ésimo vehículo podrá atravesar la intersección si no existe algún vehículo de los carriles perpendiculares que permanezca en el cruce. Con esta modificación, la definición de la dinámica vehicular se adaptó para su uso en la intersección controlada por semáforos.

Los parámetros del modelo tienen los siguientes valores. La velocidad máxima permitida de un vehículo es  $v_{\max} = 5$ , la cual corresponde a 54 km/h, que es la velocidad promedio permitida para tránsito urbano. Considerando esta velocidad, el paso de tiempo  $t$  corresponde a 2 segundos. La longitud del carril antes de la intersección es de 67 celdas, es decir,  $L = 67$  por lo que la longitud en unidades reales de la carretera antes de la intersección es de 402 metros, que corresponde a la distancia a partir de la cual un conductor puede percibir la presencia de un semáforo. El valor del parámetro de frenado aleatorio es  $R=0.5$ . Ahora es posible describir el conjunto de pasos que integran el nuevo modelo que se propone en este trabajo y que se aplican cada paso de tiempo discreto.

**Paso 1: Determinación de la Fase del Semáforo.** Primeramente se especifican los estados de la señal del semáforo para todos los carriles de conducción. En este paso, se determinan los cambios de fase (color) de los semáforos correspondientes a cada carril. Los semáforos correspondientes a los carriles de una misma calle funcionan en forma sincronizada, es decir, a un tiempo determinado  $t$  su estado se encuentran en la misma fase. Por otra parte, el funcionamiento de los semáforos para las calles A y B es complementario, es decir, el estado del semáforo de las calles A y B a un tiempo dado  $t$  siempre es distinto. Más adelante se explicará en forma detallada el esquema utilizado para determinar el cambio de fase de un semáforo.

**Paso 2: Asignación de Flujo Vehicular.** En este paso se discute la entrada de los vehículos a la intersección. Durante el periodo de duración de una fase verde asignado a una calle, una fracción de la cola formada durante la fase roja correspondiente se disolverá y pasará el cruce de la intersección. Si el índice de arribo promedio de los vehículos excede el índice máximo de evacuación entonces, en promedio, una fracción de una cola genérica no le será posible atravesar la intersección y debe esperar hasta que ocurra el próximo periodo de fase verde. Como consecuencia, la longitud de la cola se incrementará en el transcurso del tiempo. Sin embargo, en la realidad raramente se observa este fenómeno debido a que una intersección se liga a otras y por lo tanto, la posibilidad de que ocurra tal evento se restringe a casos excepcionales donde inevitablemente la cantidad de flujo de entrada es muy grande. A lo largo de este trabajo, se asume que el índice de flujo de entrada promedio es por abajo del índice de evacuación, tal que una cola genérica tendrá suficiente tiempo

para disolverse y que la intersección esté disponible para soportar el flujo de entrada. De esta forma, hay una longitud de cola típica que afecta el movimiento de los vehículos. El movimiento de un vehículo que se aproxima a un semáforo en fase roja se afecta por dos factores: la distancia al final de la cola y el estado del semáforo. Para describir el desempeño estadístico del espaciamiento de los vehículos que entran, la posición en la que se introduce un vehículo se determina en forma aleatoria por la posición del último vehículo (el de más atrás) del carril de acceso, al que se le denotará *last*, y el espaciamiento del mismo al vehículo que entra, denotado  $g_s$ , cuyo valor se determinará por la función de distribución de Poisson. El motivo por el cual se usa la distribución de Poisson para introducir los vehículos a la calle correspondiente se debe a que la distribución de Poisson se usa en gran variedad de fenómenos que incorporan la modelación de la teoría de colas y ha mostrado aproximarse bien a la realidad [5]. Además tiene la ventaja de que únicamente toma valores discretos, lo cual es deseable para el modelo, ya que es discreto tanto en tiempo como en espacio. De acuerdo a esta función de distribución, la probabilidad que el espaciamiento entre el vehículo que entra al horizonte de la intersección y su predecesor sea  $n$  es  $p(n) = (\lambda^n e^{-\lambda})/n!$ , donde el parámetro  $\lambda$  especifica tanto el promedio como la varianza de la función de distribución. El parámetro  $\lambda$  es una medida directa del flujo vehicular. Un valor de  $\lambda$  grande describe un flujo vehicular ligero, mientras que un valor de  $\lambda$  pequeño corresponde a un flujo vehicular pesado. Una vez calculada la función de distribución, se permite que un vehículo ingrese dentro del horizonte de la intersección en la posición  $last + h_s$ , donde  $h_s = g_s + 1$  y determina el llamado headway espacial<sup>3</sup>.

**Paso 3 Aplicación de las Reglas del AC a Todos los Vehículos.** En esta etapa se actualizan las velocidades y las posiciones de todos los vehículos con base en las reglas del autómata celular definidas previamente (R1-R4). Primeramente se actualizan las velocidades y posiciones de los vehículos en la calle cuya fase del semáforo es verde. Posteriormente, se procede a la actualización de la calle cuya fase del semáforo es roja. Al finalizar la aplicación de las reglas se evalúa el tiempo de espera agregado (aquí llamado *delay*) de los vehículos en la intersección, tanto de la calle A como de la calle B. Cada vez que un vehículo que se encuentra antes de la intersección se detiene contribuye al tiempo de espera total. Por lo tanto, para evaluar el tiempo de espera, se mide la longitud de la cola (el número de vehículos contiguos, cuya velocidad  $v_i = 0$ ) que se forma en el paso de tiempo  $t$ . Esta cola de espera se mide en dirección contraria al flujo a partir del vehículo que se encuentre en la posición  $L$  del carril (antes del cruce) hasta que se encuentre el primer vehículo con velocidad  $v_i \neq 0$ ; a la cola la denotaremos como  $Q$ . El tiempo de espera al tiempo  $t+1$  se obtiene añadiendo la longitud de la cola  $Q$  al tiempo de espera del paso de tiempo anterior  $t$  como se hace en [4]:

$$delay(t + 1) = delay(t) + Q(t). \quad (1)$$

Esto asegura que durante el siguiente paso de tiempo, cada uno de los vehículos detenidos contribuye un paso de tiempo al tiempo de espera total.

Cabe mencionar que debido a la definición de las reglas del AC propuesto en este trabajo, es posible que una calle cuya fase del semáforo se encuentra en verde

<sup>3</sup> Distancia entre las correspondientes defensas traseras de dos vehículos sucesivos.

contribuya al tiempo de espera total si el cruce se encuentra ocupado por algún vehículo de la calle opuesta.

En la siguiente sección, se muestran resultados de la simulación computacional del modelo descrito en esta sección, así como algunos resultados analíticos para comparación del funcionamiento.

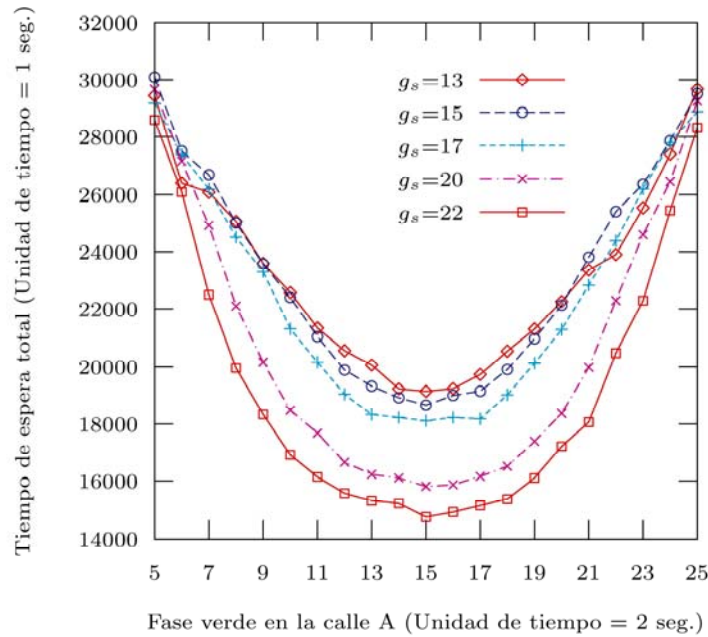
### 3 Resultados

Para obtener los resultados que se presentan en esta sección, se realizaron simulaciones del modelo durante  $T=1800$  pasos de tiempo correspondientes a una hora en tiempo real. La duración del ciclo de semáforo,  $C$ , es igual a la suma de los tiempos que duran la fase verde  $T_v$  y la fase roja  $T_r$  del mismo, es decir,  $C = T_v + T_r$ . En particular, se consideraron  $C=30$  pasos de tiempo, que equivalen a una duración de tiempo real de 60 segundos. Para este valor de  $C$  se realizaron simulaciones para  $1 \leq T_v \leq 29$  en incrementos de 1, mientras que  $T_r$  toma el valor  $C-T_v$ . También se consideraron distintos valores del espaciamiento  $g_s$  (variando el valor del parámetro  $\lambda$  de la función de distribución de probabilidad de *Poisson*). El objetivo principal de las simulaciones realizadas fue observar la influencia del semáforo sobre el flujo vehicular considerado bajo condiciones distintas del flujo vehicular y de la duración de las fases del semáforo. Cabe recordar que el funcionamiento de los semáforos es complementario. Para ejemplificarlo, si suponemos que el ciclo del semáforo es de 60 s., si la fase verde del semáforo de la calle A dura 2 segundos, su fase roja durará 58 segundos y en forma inversa para la calle B.

Los resultados se obtuvieron del promedio de 50 experimentos independientes, para cada simulación. Sin pérdida de generalidad, los resultados que se presentan serán con referencia a las fases del semáforo de la calle A (vertical) y se referirá a la duración de la fase verde como  $T_v$  y a la fase roja como  $T_r$ . En el caso en que sea necesario hacer referencia a la duración de la fase verde de la calle B, se denotará como  $T_{vB}$  y a la fase roja como  $T_{rB}$ .

#### 3.1 Flujo Vehicular de Entrada Simétrico

Como punto inicial de la investigación del funcionamiento del modelo se consideró un flujo de entrada simétrico para ambas calles, A y B. Esto significa que el valor asignado al parámetro  $\lambda$  de la calle A ( $\lambda_A$ ) fue igual al correspondiente a la calle B ( $\lambda_B$ ) en cada instante de tiempo, esto es  $\lambda_A=\lambda_B$ .



**Fig. 2.** Gráfica que muestra el tiempo de espera total contra la duración de la fase verde de la calle A, para distintos flujos de entrada, iguales para ambas calles, es decir,  $\lambda_A = \lambda_B$ . La longitud del ciclo es 60 s.

En la Fig. 2 se muestra el tiempo de espera total de los vehículos en segundos, con respecto a la duración de la fase verde de la calle A y una duración del ciclo  $C=30$  pasos de tiempo. Se presentan las gráficas correspondientes a distintos valores de  $\lambda$ , es decir, el gap espacial de entrada promedio  $\hat{g}_s$ .

Como se observa de esta figura, la curva resultante tiene forma de "U". La zona intermedia, donde el tiempo de espera total se minimiza, corresponde a una situación en la que el tiempo que dura la fase verde de la calle A excede el flujo entrante; así las colas de espera desaparecen durante una fase verde del semáforo y como consecuencia todos los coches que están esperando pueden atravesar el cruce durante la fase verde inmediata. Nótese, que el flujo vehicular óptimo (el mínimo en la gráfica) se obtiene cuando la duración de la fase verde de ambas calles es igual, es decir,  $T_v = T_{vB}$ . En general para cualquier valor de  $C$  el flujo vehicular óptimo se obtiene cuando a los semáforos de distintas calles se les asigna la misma duración de fase verde, es decir,  $T_v = C/2$ , dado que el flujo vehicular de entrada es simétrico para ambas calles.

Con base en el funcionamiento de la intersección es posible determinar las condiciones en las que la intersección no sería capaz de soportar el flujo vehicular que entra y como consecuencia la longitud de la cola de espera comenzaría a crecer. Por lo tanto, la cola de espera que se forma no podría desaparecer completamente en

una sola fase verde del semáforo correspondiente y los congestionamientos vehiculares se incrementarían. La fracción  $T_v/C$  del ciclo está dada en términos de la duración de la fase verde del semáforo de la calle A. Esto implica que a la calle A le corresponden  $3600*(T_v/C)$  segundos de fase verde en una hora y el tiempo restante le corresponde a la calle B. Considerando el hecho de que durante la fase verde los vehículos atraviesan la intersección con intervalos promedio aproximados de 0.5 vehículos por segundo por carril, la capacidad máxima del flujo de salida, denotada por  $\langle Cap_{max} \rangle$  sería  $\langle Cap_{max} \rangle = 1800*(T_v/C)$ . Por otra parte, es posible estimar el flujo de entrada total a la intersección con base en el espaciamiento promedio. Para este propósito, se obtiene el intervalo de tiempo promedio en segundos entre dos vehículos que entran  $h_{t\lambda_A}$  como:

$$h_{t\lambda_A} = 6*(\lambda_A / v_{max}) \text{ segundos} \quad (2)$$

En (2) se asume que los vehículos entran a la intersección con la velocidad máxima  $v_{max}=15$  m/s. y el parámetro 6 denota la longitud en metros de las celdas. Con base en lo anterior, el número promedio de los vehículos que entran en una hora se aproxima a  $\langle N_{in} \rangle = 3600 / h_{t\lambda_A}$ . Para evitar que las colas de espera crezcan demasiado debe cumplirse la siguiente restricción [4]:

$$\langle N_{in} \rangle \leq \langle Cap_{max} \rangle \quad (3)$$

Sustituyendo en la fórmula de (3) la velocidad máxima por su valor correspondiente de 15 m/s, se obtiene que  $T_v \geq (5*C/\lambda_A)$ . Como la duración del ciclo del semáforo es  $C=60$  s, entonces el valor mínimo consistente de la fase verde para  $\lambda=13$  sería 24 s, para  $\lambda=15$  sería 20 s, para  $\lambda=17$  sería 18 s, para  $\lambda=20$  sería 15 s y para  $\lambda=22$  sería 14 s. Además, se puede concluir que el valor más pequeño de  $\lambda_A$  debe ser 10 (ó 60 m), y su correspondiente fase verde debe durar 30 s.

Debido a que la duración de la fase verde de la calle B es  $C-T_v$ , es fácil deducir que la condición  $C-T_v \geq (5C)/\lambda_B$  se cumple. Combinando ambas condiciones sobre  $T_v$ , se obtiene la siguiente desigualdad sobre  $T_v$  para una condición estacionaria de colas:

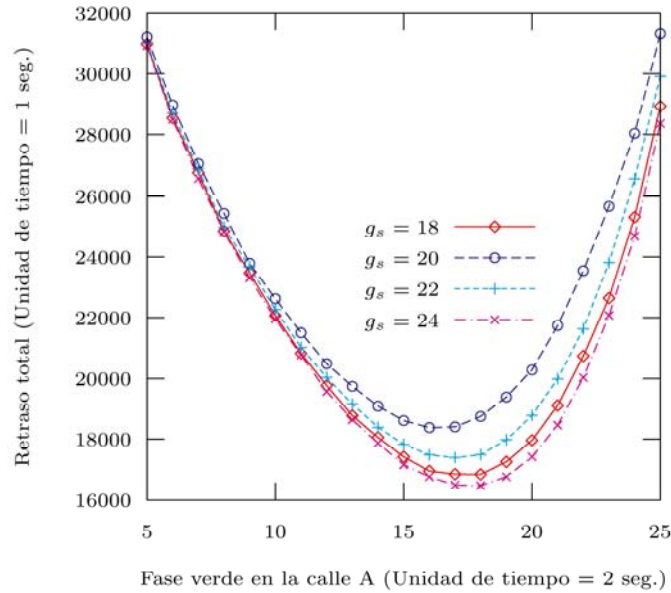
$$(5C/\lambda_A) \leq T_v \leq (C*(1-5/\lambda_B)) \quad (4)$$

Como consecuencia, los parámetros  $\lambda_A$ ,  $\lambda_B$  y  $T_v$  deben satisfacer la desigualdad en (4), en otro caso la longitud de la cola seguirá creciendo. A partir de (4), se pueden concluir dos condiciones en los intervalos de entrada:  $\lambda_B \geq 5$  y  $(1/\lambda_A + 1/\lambda_B) \leq (1/5)$ , las cuales se cumplen sin importar la duración de la fase verde.

### 3.2 Flujo Vehicular de Entrada Asimétrico

La simulación de un flujo de entrada simétrico nos permitió comprobar que el modelo funcionaba adecuadamente. Sin embargo, en la realidad, los flujos de entrada en una intersección son asimétricos. En esta subsección, se presentan los resultados de simulación obtenidos para valores asimétricos del flujo de entrada para las calles A y B, es decir, donde  $\lambda_A < \lambda_B$ . En este tipo de flujo de entrada, el número de vehículos que circula por una de las dos calles es mayor. Ésta es una situación común, ya que en general las avenidas principales intersectan con calles poco usadas, cuyo

flujo vehicular es más bajo. En la Fig. 3 se presenta los resultados correspondientes correspondiente para  $\lambda_A=13$  y diferentes valores del espaciamiento de entrada de la calle B,  $\lambda_B=18, 20, 22$  y  $24$ . La gráfica muestra el tiempo de espera total con respecto a la duración de la fase verde de la calle A. Como se puede observar, el tiempo de espera total mínimo está desplazado hacia la derecha, en comparación con los resultados correspondientes al caso simétrico para  $\lambda_A = 13 = \lambda_B$  de la Fig. 2. Este comportamiento expresa que debe asignarse mayor cantidad de tiempo a la duración de la fase verde ( $T_v$ ) de la calle cuyo flujo vehicular de entrada es mayor, en este caso a la calle A, como es de esperarse.



**Fig. 3.** Gráfica que muestra el tiempo de espera total contra la duración de la fase verde de la calle A, para distintos flujos de entrada de la calle B ( $\lambda_B$ ) y flujo fijo para la calle A ( $\lambda_A = 13$ ), tal que  $\lambda_A < \lambda_B$ . La longitud del ciclo es 60 s.

Para minimizar el tiempo de espera total, se debe determinar la distribución del tiempo asignado a la fase verde de cada calle en forma analítica. Para este propósito, se consideró que la duración de la fase verde de un semáforo es proporcional al flujo vehicular de entrada de cada calle. Se denota el arribo promedio de los vehículos de las calles A y B como  $\alpha_A$  y  $\alpha_B$  respectivamente. Obsérvese que  $\alpha_A$  y  $\alpha_B$  son el inverso de los espaciamientos de entrada, es decir,  $\alpha=1/\lambda$ . Si se evalúa, el tiempo de espera de la calle A en la fase roja, cuya duración es  $C-T_v$ , para un ciclo de semáforo completo  $C$  durante el intervalo de tiempo  $[t, t+1]$ , el número de vehículos que se adicionan a la cola de espera es  $\alpha_A \Delta t$ . Estos vehículos deben esperar  $C-T_v-t$  segundos

hasta que se inicie la siguiente fase verde del semáforo. Por lo tanto, su contribución al tiempo de espera será  $\alpha_A * (C - T_v - t) * \Delta t$ . Así, el tiempo de espera agregado de la calle A durante el ciclo del semáforo se obtiene mediante la suma del tiempo de espera como sigue:

$$\sum_{t=0}^{C-T_v-1} \alpha_A (C - T_v - t) \Delta t = \frac{\alpha_A}{\Delta t} \left[ (C - T_v)^2 - (C - T_v) \right] \quad (5)$$

donde  $\Delta t=1$ .

De forma similar, la contribución de la calle B al tiempo de espera total puede ser evaluada como  $(1/2) * \lambda_B * (T_v^2 - T_v)$ . Sumando el tiempo de espera de ambas calles, para una cierta duración de fase verde de semáforo  $T_v$ , el tiempo de espera total, denotado como  $delayT ( T_v )$  es entonces:

$$delayT ( T_v ) = (1/2) * [\alpha_A [(C - T_v)^2 - (C - T_v)] + \alpha_B (T_v^2 - T_v)] \quad (6)$$

La ecuación (6) calcula el tiempo de espera total para una duración determinada de fase verde  $T_v$ , pero no permite determinar la duración de la fase verde que minimiza el tiempo de espera total. Para ello, se requiere encontrar un tiempo de fase verde óptimo,  $T_v^{opt}$ , tal que  $delayT ( T_v^{opt} ) < delayT ( T_{v_i} ) \forall i \in 1, 2, \dots, C - T_r$ . Como  $T_v$  es discreto, para minimizar el tiempo de espera total se debe observar para cuales valores de  $i$  y  $j$   $delayT ( T_{v_i} ) > delayT ( T_{v_j} )$ , donde  $j=i+1$ , lo cual es equivalente a:

$$[delayT ( T_v ) / delayT ( T_{v+1} )] > 1 \quad (7)$$

Nótese, que cuando la desigualdad mostrada en (7) se invierte, se logra el valor de  $T_v$  que minimiza el tiempo de espera total. Entonces, despejando con respecto de  $T_v$ , se obtiene un valor aproximado para la duración de la fase verde óptima  $T_v^{opt}$  con flujos de entrada asimétricos, que se muestra en la siguiente ecuación:

$$T_v^{opt} \cong [ \alpha_A * (C - 1) ] / [ \alpha_A + \alpha_B ] \quad (8)$$

La ecuación (8) permite determinar los valores aproximados para la duración de la fase verde óptima ( $T_v^{opt}$ ) de la calle A en proporción al flujo vehicular de entrada. Es importante mencionar que estos resultados analíticos concuerdan con los resultados de simulación computacional obtenidos del modelo aquí propuesto y mostrados en la Fig. 3.

Es importante notar que la ecuación obtenida en ( 8 ) no depende de la dinámica definida para los vehículos, sino únicamente del flujo vehicular de entrada y la duración del ciclo de semáforo; por lo tanto puede aplicarse aun a modelos que consideren anticipación de la velocidad y con calles de un solo carril o más de dos.

## 4 Conclusiones

En este artículo se presentó un nuevo modelo estocástico para simular el flujo vehicular de una sola intersección de dos calles perpendiculares, con dos carriles cada una cuyo flujo vehicular se desplaza en sentido opuesto. La dinámica de los vehículos se determinó mediante AC, mientras que el flujo vehicular se controló mediante semáforos que operan bajo un esquema de tiempo fijo. Se analizaron los tiempos de espera de los vehículos en la intersección con respecto a la duración de la fase verde de una de las calles, con la finalidad de determinar un ciclo de semáforo óptimo así como la duración de la fase verde óptima ( $T_v^{opt}$ ). El objetivo fue incrementar el número de vehículos que pueden circular sin que se produzcan largas colas de espera. Para este propósito se analizaron dos situaciones de flujo de entrada con respecto a las dos calles consideradas: flujo de entrada simétrico y flujo de entrada asimétrico. Para ambos casos se obtuvieron aproximaciones analíticas que coinciden muy bien con los resultados obtenidos de la simulación. Además, se determinaron condiciones del flujo vehicular de entrada. El modelo preserva la simplicidad que caracteriza a los modelos basados en AC. Es importante enfatizar que aun cuando la dinámica vehicular se realizó a un nivel de detalle microscópico, el modelo presentado en este trabajo es mesoscópico, es decir, combina el nivel de detalle microscópico con el macroscópico, sin aumentar su complejidad. Cabe mencionar que tanto el modelo como la forma analítica de optimizar el flujo no se había realizado antes.

## 5 Referencias

- [1] Chowdhury, D., Santen, L., Schadschneider, A.: Statistical Physics of Vehicular Traffic and Some Related Systems. *Phys. Rep.* **329-4** (2000) 199--329.
- [2] Esser, J., Schreckenberg, M. Microscopic Simulation of Urban Traffic based on Cellular Automata. *Int. J. Mod. Phys. C* **8-5** (1997) 1025-1036.
- [3] Fouladvand, M.E., Nematollahi, M. Optimization of green-times at an isolated urban crossroads. *Eur. Phys. J. B* **22** (2001) 395--401.
- [4] Fouladvand, M.E., Sadjadi, Z., Reza, M. Optimized traffic flow at single intersection: traffic responsive signalization. *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004) 561--576.
- [5] Kotz, S., Johanson, N.L. *Encyclopedia of Statistical Sciences*. **3**. (1982). Wiley, New York.
- [6] Lárraga, M.E., del Río, J.A., Alvarez-Icaza, L. Cellular Automata For One-Lane Traffic Flow Modelling. *Transp. Res. C, Emerg. Tech.* **5** (2005) 63--74.
- [7] Lárraga, M.E., del Río, J.A., Schadschneider, A. New kind of phase separation in a CA traffic model with anticipation. *J. Phys. A: Math. Gen.* **37(12)** (2004) 3769--3781.
- [8] Nagel, K., Schreckenberg, M. Cellular automaton models for freeway traffic. *J. Phys. I* **2** (1992) 2221--2229