Selección de una Cartera de Inversión en la Bolsa Mexicana de Valores por Medio de un Método de Programación Lineal

José Crispín Zavala-Díaz[1], Dalia Vianey García-Villagomez[1], Marco Antonio Cruz-Chavez[2]

[1] Facultad de Contaduría, Administración e Informática, [2] Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas. Universidad Autónoma del Estado de Morelos
vianey@yahoo.com, crispin_zavala@uaem.mx, mcruz@uaem.mx

Resumen. En este artículo se presenta el modelo matemático para la selección de una cartera de inversión con el máximo rendimiento y el mínimo riesgo, el cual es resuelto utilizando el método SIMPLEX. Los dos problemas se resuelven en forma independiente, el de maximizar el rendimiento y el de disminuir el riesgo, y se utilizan las reglas de inversión para obtener la mejor cartera de inversión con los dos resultados de ambos problemas. Se resuelve un problema con tres acciones de la Bolsa Mexicana de Valores con el objetivo de comparar nuestros resultados con los obtenidos por medio de un método estadístico que generalmente se utiliza para este fin. Los resultados nos muestran que la utilización de la programación lineal es promisoria en esta área ya que es posible considerar más factores que podrían influir en la selección de una cartera de inversión que los métodos tradicionales estadísticos no utilizan.

Palabras clave: programación lineal, cartera de inversión, modelo de selección de acciones.

1. Introducción

Las empresas que requieren recursos (dinero) para financiar su operación o proyectos de expansión pueden obtenerlo a través del mercado bursátil, mediante la emisión de valores como son las acciones, obligaciones, papel comercial, etc, disponibles para los inversionistas en la Bolsa Mexicana de Valores.

Cada una de estas acciones equivale a poseer una parte de la empresa y su valor puede depender de la tasa de interés, así como del crecimiento de la economía o de un sector en particular. En general, si la economía crece las empresas ganan más dinero y la acción va a tener un precio mayor. Pero, es una regla que tiene numerosas excepciones, en consecuencia cada acción tiene un riesgo asociado.

Para obtener un rendimiento a un riesgo aceptable la inversión se debe diversificar en una cartera de inversión. Una cartera de inversión es una combinación de activos o títulos individuales, de tal forma que una combinación de ellos casi siempre sea menos arriesgada que cualquier título individual. Por tanto, se pretende

M.A Cruz Chávez, J.C Zavala-Díaz (Eds): CICos 2008, ISBN:978-607-00-0165-9. pp. 165-179, 2008

que la selección de una cartera de inversión sea una combinación de acciones que disminuya el riesgo y aumente la utilidad.

Desde el punto de vista teórico, la existencia de este equilibrio riesgo-rendimiento es básica para los modelos de evaluación de activos. Mientras que desde el punto de vista práctico, se debe tener la capacidad de colocar los resultados absolutos en el contexto de características de riesgo-rendimiento de un programa de inversión.

Los modelos de optimización son usados en casi todas las áreas para la toma de decisiones, donde el modelo matemático consiste en una función objetivo y un conjunto de restricciones en la forma de un sistema de ecuaciones o inecuaciones. En este trabajo mostramos la forma de obtener la función objetivo y sus restricciones a partir de datos disponibles en la página de Internet de la Bolsa Mexicana de Valores. Los resultados de nuestro modelo son comparados contra los datos obtenidos por medios estadísticos tradicionales que se basan principalmente en la variación de los coeficientes de correlación [1,3,6].

En la sección dos se presenta una descripción de los métodos y criterios que se utilizan actualmente para la selección de una cartera de inversión. En la sección tres se define el modelo matemático de optimización y sus restricciones. En la sección cuatro se comprueba su validez con un número reducido de acciones. En la sección cinco se mencionan las conclusiones a que se llegaron con el presente modelo, donde concluimos que los modelos de optimización tendrán un futuro promisorio para la selección de una cartera de inversión.

2. Descripción de los métodos de inversión

2.1. El proceso de inversión

El proceso de inversión implica la manera de decidir sobre la selección de qué invertir en el mercado de valores negociables, qué tan vastas deben ser esas inversiones y cuándo hacerlas. La base del proceso de la inversión es un procedimiento formado con los cinco pasos siguientes [1]:

1. **Política de inversión**. Consiste en determinar los objetivos del inversionista y la cantidad de su riqueza que está dispuesto a invertir.
2. **Análisis de Valores.** Implica examinar varios valores individuales (o grupos de valores) dentro de amplias categorías de valores financieros identificados previamente. Una razón para este análisis es identificar aquellos valores que parezcan estar mal valuados.
3. **Construcción de la cartera.** Implica la identificación de acciones específicas en las cuales invertir, así como la determinación de cuanto invertir en cada una. Las cuestiones de selectividad, *timing* y diversificación deben ser tratadas por el inversionista. La selectividad, también conocida como micro pronóstico, se refiere al análisis de valores y se enfoca en el pronóstico de los movimientos de precios de valores individuales. El *timing*, también conocido

como macro pronóstico, implica el pronóstico de los movimientos de precio de las acciones ordinarias respecto a los valores de ingreso fijo, como los abonos corporativos y las letras del tesoro. La diversificación implica la construcción de la cartera del inversionista de tal manera que se minimice el riesgo sujeto a ciertas restricciones.

4. **Revisión de la cartera**. Se refiere a la repetición periódica de los tres pasos anteriores. Con el tiempo se puede cambiar los objetivos de la inversión, lo que a su vez haría que la cartera actual fuera menos que óptima.
5. **Evaluación del desempeño de la cartera**. Consiste en determinar periódicamente el rendimiento ganado por la cartera y el riesgo que corre el inversionista. Por tanto, se requieren medidas adecuadas de rendimiento y riesgo así como estándares relevantes.

En este trabajo nos enfocamos a la construcción de la cartera de inversión, y en particular a la selectividad para realizar un micro pronóstico de una cartera de inversión.

2.2. Métodos utilizados para la selección de la cartera de inversión.

2.2.1. Método de Markowitz.

Inicia con la suposición de que se tiene una cantidad determinada de dinero para invertir en el presente. Este dinero se invertirá durante un lapso de tiempo, conocido como período de tenencia. Al final del período de tenencia se venderán los valores que se compraron y se utilizarán los beneficios para los gastos, la reinversión en varios valores o ambas cosas. En este punto, el método de Markowitz puede volver aplicarse a los beneficios que se van a reinvertir. Por tanto, esté método es para un solo periodo. En $t = 0$ se decide qué valores comprar y conservar hasta que $t = 1$. Entonces, en $t = 1$ se decide de nuevo qué valores conservar hasta $t = 2$, y así sucesivamente. Al buscar tanto maximizar el rendimiento esperado como minimizar la incertidumbre (es decir, el riesgo), se tienen dos objetivos en conflicto que se deben sopesar al tomar la decisión de compra cuando $t = 0$. Una consecuencia al tener estos dos objetivos en conflicto es que se debe diversificar la compra no sólo un valor sino de varios [3].

La rentabilidad de una cartera se define por la media ponderada de las rentabilidades esperadas de los n valores que la componen, mientras que el riesgo es función de los tres factores que se enuncian a continuación:

- La proporción o ponderación de cada valor en el portafolio.
- La varianza o la desviación estándar de la rentabilidad de cada valor.
- La covarianza o el coeficiente de correlación entre las rentabilidades de cada par de valores.

En el método de Markowitz las decisiones sólo se basan en los rendimientos esperados y las desviaciones estándar. Es decir, se estima el rendimiento esperado y la desviación estándar de cada cartera y se escoge la “mejor” con base en las siguientes suposiciones:

Primera suposición, cuando se tiene que elegir entre dos carteras similares, siempre se escogerá la que tenga el rendimiento esperado más alto, es decir, siempre se preferirá los niveles más altos de riqueza Terminal y no los niveles más bajos.

Segunda suposición, dadas las dos carteras con la misma desviación estándar, se escogerá la que tenga el rendimiento esperado más alto. [3]

El método de Markowitz se desarrolló considerando que el inversor prefiere la rentabilidad y rechaza el riesgo. Por lo tanto, para él una cartera será eficiente si proporciona la máxima rentabilidad posible para un riesgo dado, o de forma equivalente, si presenta el menor riesgo posible para un nivel determinado de rentabilidad. El conjunto de carteras eficientes puede calcularse resolviendo el siguiente programa cuadrático paramétrico:

$$\min \sigma^2\left(R_p\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \rho_{ij} \tag{1}$$

Sujeto a:

$$E\left(R_p\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i E\left(R_i\right) = V^*$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad \left(i = 1,2,\ldots,n\right)$$

Donde x_i es la incógnita del problema y es la proporción del presupuesto destinado al activo financiero i, $\sigma^2(R_p)$ es la varianza de la cartera p, ρ_{ij} es la covarianza entre los rendimientos de los valores i y j. $E(R_p)$ es la rentabilidad o rendimiento esperado de la cartera p, de tal forma que al variar el parámetro V^* obtendremos en cada caso el conjunto de proporciones x_i que minimizan el riesgo de la cartera, así como su valor correspondiente. El conjunto de pares $[E(R_p), \sigma^2(R_p)]$ o combinaciones rentabilidad-riesgo de todas las carteras eficientes es denominado «frontera eficiente». Una vez conocida ésta, el inversor, de acuerdo con sus preferencias, elegirá su cartera óptima.

Los problemas fundamentales del modelo de Markowitz.

Actualmente los problemas para la utilización del modelo de Markowitz no son computacionales, sino que tienen que ver con los supuestos de partida [3]. El modelo de Markowitz parte de 5 hipótesis fundamentales, y cuyo cumplimiento tiene una gran trascendencia en cuanto a la validez de los resultados obtenidos con el mismo:

1. Se conoce la rentabilidad esperada de cada uno de los activos financieros considerados.

2. Se conoce y se supone constante en el tiempo la varianza de cada uno de los activos financieros y la covarianza entre ellos.
3. Los rendimientos de los diferentes activos financieros se comportan de acuerdo con una distribución normal.
4. Los inversores actúan de forma racional.
5. El modelo optimiza para un solo período [3].

Si se supone que se conoce la rentabilidad esperada, la varianza y la covarianza de los diferentes activos financieros. El problema es cuando, en intervalos relativamente cortos de tiempo (por ejemplo un año), son muy grandes los valores de las varianzas con respecto a las rentabilidades esperadas. Esto significa que el error de predicción en esos períodos es también muy grande. Por otra parte, el modelo de Markowitz es extremadamente sensible a los valores de las rentabilidades esperadas, de tal forma que unas pequeñas variaciones de las rentabilidades esperadas suponen carteras con estructuras muy diferentes (o por lo menos aparentemente muy diferentes) en su composición.

2.2.2. Series de tiempo.
El análisis de series de tiempo comprende un intento de identificar los factores que ejercen influencia sobre cada uno de los valores periódicos de una serie. Este procedimiento de identificación se denomina “descomposición”. Cada componente se identifica por separado de tal manera que la serie histórica pueda proyectarse al futuro y utilizarse en pronósticos tanto a corto como a largo plazo. Los cuatro componentes que se encuentran en una serie histórica son: Tendencia, Variaciones Cíclicas, Variaciones Estaciónales y Fluctuaciones Irregulares. [4]

La tendencia son movimientos de largo plazo en una serie histórica que se pueden describir mediante una ecuación de una línea recta o curva. Consiste de un patrón de movimientos ascendentes o descendentes, generales o persistentes, a largo plazo. Dado que en el análisis de la tendencia la variable independiente es el tiempo, se elaboraron las tablas de los indicadores disponibles a todo el público en la página de Internet de la Bolsa Mexicana de Valores: cambios de precios de compra y venta, cambios en el INPC y volumen de acciones. Con estos tres indicadores se trato de elaborar un modelo lineal para realizar el pronóstico, pero las correlaciones obtenidas son muy bajas, considerando el tiempo, y no es posible utilizarlas para pronósticos. Por tanto este método no se considero para el pronóstico de la cartera de inversión.

2.2.3. Modelo Black & Scholes
El modelo de valuación de opciones original fue desarrollado por Black & Scholes para el cálculo del valor de una opción de compra europea que no paga dividendos; las variables de este modelo son precio de la acción, precio de ejercicio, el tiempo de vencimiento, la varianza del precio de la acción y la tasa libre de riesgo. Merton modificó el modelo original para incluir el factor de dividendos, que ha sido ampliamente aplicado para calcular opciones de empresas que pagan dividendos y que muchos investigadores han comprobado su utilidad [ref].

Algunos investigadores como Simons (1997) descubrieron las debilidades del modelo como son la sobrestimación del valor dado, ya que considera que los rendimientos de los valores se distribuyen normalmente; asimismo, para la aplicación del modelo se debe conocer la volatilidad de la acción, a través de una estimación estadística que puede estar sujeta a errores.

El Modelo de Black & Scholes aplicado a la valuación de empresas se basa en el análisis contingente, que se refiere a una técnica para determinar el precio de un valor cuyo resultado depende del precio de uno o más valores. El origen del análisis contingente es el modelo de opciones de Black & Scholes, el cual contiene elementos cualitativos con un gran significado práctico. Esta teoría sostiene que las deudas corporativas, en general, pueden ser vistas como combinaciones de simples contratos de opciones [5].

La aplicación empírica del modelo de valuación de Black & Scholes muestra una sobreestimación consistente del valor de las empresas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores [8]. Asimismo, este modelo tiende a arrojar valores mayores y positivos en comparación con el precio de mercado, esto se interpreta como una sobre valuación del valor de la empresa. La causa es que el modelo considera como variable para determinar el valor de la empresa al valor del activo total, que suele ser muy grande puesto que trabajan con una fuerte inversión en capital de trabajo y activo fijo.

Por otra parte, al considerar en este modelo a la volatilidad como variable para el cálculo del valor, define un riesgo alto cuando los valores individuales también son muy altos. Asimismo al considerar el apalancamiento se logran también valores elevados, ya que se transfiere el valor del acreedor al accionista.

La aplicación de este modelo a un conjunto de empresas mexicanas durante un periodo permite definir que hay que tener cuidado en la aplicación del mismo para efectos de valuación, considerando entre otros aspectos las características propias de la empresa como son la inversión fija y el apalancamiento. Además, se tiene que tomar en cuenta que se ha demostrado que es un modelo que privilegia el valor cuando el riesgo es elevado.

Las conclusiones mencionadas sobre este modelo se basan en resultados obtenidos en aplicaciones realizadas por diferentes autores de los libros consultados [ref], ejemplos que no fueron realizados en éste trabajo, pero se consideró el modelo de valuación Black & Scholes porque es generalmente utilizado, pero sobrevalúa el valor de las acciones, lo cual no es muy confiable al momento de elegir en que acciones invertir ya que se puede pensar que una acción es rentable cuando no lo es.

Se pretendía considerar los mismos datos e información que toma en cuenta el modelo Black & Scholes para realizar su cálculo y obtener el Valor de la Empresa, pero en sus ecuaciones intervienen variables que no se publican en la pagina de Internet. Toda esta información se obtiene en los Anuarios Bursátiles y Financieros de la Bolsa Mexicana de Valores, los cuales no están disponibles a través de Internet y por esta razón se descartó este modelo.

2.2.4. Formulas Financieras para combinación de portafolios de inversión. (*Capital Assets Pricing Model* CAPM).

Todo activo financiero puede ser descrito a partir de dos estadígrafos: un estadígrafo de posición, la media, que proporciona una medida del rendimiento promedio del activo en un determinado periodo; y un estadígrafo de dispersión, la desviación estándar, de los distintos rendimientos respecto al rendimiento promedio, que proporciona una medida del riesgo del activo financiero [6].

El rendimiento medio de cada una de las acciones se calcula con la fórmula de un promedio aritmético con los rendimientos de cada acción en cada periodo:

$$R_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} r_{i_j}}{m} \tag{2}$$

Donde R_i es el rendimiento promedio de la acción i, r_i es el rendimiento de la acción i en cada periodo j y m es el número de periodos considerados.

El riesgo asociado a la acción individual se determina a través de la desviación estándar de los rendimientos, cuya fórmula se presenta a continuación.

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m} \left(r_{i_j} - R_i\right)^2}{m-1}} \tag{3}$$

Adicionalmente a los estadígrafos de posición y dispersión, para la conformación de portafolios es necesario contar con uno adicional: la covarianza entre los rendimientos de los activos financieros, la cual esta dada por:

$$\rho_{12} = \frac{\sum_{j=1}^{m} r_{1_j} r_{2_j} - \frac{\left(\sum_{j=1}^{m} r_{1_j}\right)\left(\sum_{j=1}^{m} r_{2_j}\right)}{m}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(r_{1_j} - R_1\right)^2 \sum_{j=1}^{m} \left(r_{2_j} - R_2\right)^2}} \tag{4}$$

Selección del Portafolios de activos con riesgo

El portafolio de inversión se conforma asignando porcentajes diversos del monto de inversión a determinados activos financieros. El portafolio resultante, al igual que las acciones individuales, será identificado por el rendimiento medio y su riesgo asociado. La condición para la asignación de los porcentajes a cada activo financiero es que su suma sea igual al 100%. El rendimiento y riesgo del portafolio de inversión se determinan con las ecuaciones siguientes:

$$\mathrm{Re}\,n\,\mathrm{dim}\,iento = \sum_{i=1}^{n} W_i R_i \tag{5}$$

$$Riesgo = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(W_i^2 + \sigma_i^2\right) + 2\sum_{i=1}^{n} \left(W_i W_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}\right)} \tag{6}$$

Donde W_i *es el* % de inversión en la acción *i*. R_i: Rendimiento promedio de la acción *i*. σ_i: Riesgo o desviación estándar de la acción *i*. ρ_{ij}: Correlación entre las acciones *i, j*. *n*: número de acciones

El problema de aplicar estas ecuaciones es el número de acciones y los porcentajes que analicemos. Por ejemplo, si se tienen tres acciones y se va analizar cada 10%, se tendrá una complejidad n^3, para el 10% se tendrán *1,000* aplicaciones, si se requiere que se analice para cada 1% se tendrán $1X10^6$ cálculos. Pero si se requiere analizar 10 acciones, la complejidad es de n^{10}, lo cual hace al problema prácticamente no computable.

3. Modelo matemático para seleccionar la cartera de inversión por medio de la programación lineal.

La programación lineal es un proceso de optimización con una sola función objetivo que se expresa matemáticamente [7]. El adjetivo lineal significa que todas las funciones del modelo y variables deben ser lineales. En el problema de la selección de la cartera de inversión se tienen dos funciones objetivo, la primera es maximizar las ganancias y la segunda, no menos importante que la primera, es disminuir el riesgo.

Para la construcción de nuestro modelo matemático se consideraron los aspectos sobresalientes de los modelos de Markowitz y de CAPM.

La selección de la cartera de inversión se hace en el momento $t = 0$, y en el siguiente momento $t=1$ se hace otra nueva selección. De esos dos modelos consideramos la magnitud promedio del rendimiento y del riesgo. Del modelo de Markowitz consideramos el planteamiento del problema de optimización con un parámetro en una restricción, nuestro modelo lo hace de forma similar, donde el parámetro modifica la magnitud de la restricción o las restricciones para determinar la solución. Este problema es similar al knapsack problem con un parámetro [9]. Del modelo de CAPM seguimos el procedimiento de la selección de la cartera optima, el cual es consiste de la diferencia mínima entre el riesgo y el rendimiento, ya que el riesgo generalmente es mayor al rendimiento.

Con nuestro modelo matemático eliminamos la dependencia de la covarianza, ésta indica estadísticamente la relación en el tiempo entre el rendimiento de dos acciones. En los modelos de Markowitz y CAPM, si la covarianza entre el rendimiento de dos acciones es baja entonces, es posible, que esas dos acciones formen parte de la solución, lo anterior de cierta forma indica que el comportamiento del rendimiento entre ambas acciones no están relacionadas. Pero el que tengan una covarianza baja no nos muestra si esos rendimientos de esas dos acciones son estadísticamente independientes [10].

En los modelos anteriores solo se considera el rendimiento y el riesgo de las acciones, ignorando las demás variables e indicadores disponibles en la página de Internet de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), alrededor de 23 [8]. La duda ahora es ¿Que otras variables o indicadores tenemos que considerar en el modelo? La respuesta puede ser: Todas las variables e indicadores publicados en esa pagina, la inclusión de estas podría ser en conjunto, en forma individual o una combinación de ellas. El problema nuevo es definir cuáles variables o indicadores tienen influencia en el pronóstico de la selección de una cartera de inversión.

En este trabajo se decidió incluir solo una variable más a las consideradas por los modelos previos (rendimiento y riesgo de la acción), este es el precio de venta de la acción. La decisión es a causa de que a partir de éste se derivan las dos variables recomendadas por Markowitz y por el método CAPM. Una vez definidas las variables, otro problema al cual nos enfrentamos es definir la magnitud del parámetro de las restricciones y sus cambios. Para esto hacemos las suposiciones siguientes:

Primera suposición. La cantidad de dinero requerida mínima es el costo de la acción mas barata, a partir de esta cantidad se llega a la cantidad de dinero de la acción más cara.
Segunda suposición. El riesgo mínimo de la cartera de inversión es el riesgo de la acción que tenga el menor de todas las acciones y éste variará hasta el riesgo más alto de las acciones.
Tercera suposición. El rendimiento mínimo de la cartera de inversión es el rendimiento de la acción que tenga el menor rendimiento de todas las acciones y éste variara hasta el rendimiento más alto de las acciones.

Con las suposiciones anteriores llegamos a los modelos que se presentan a continuación:

3.1. Modelo de optimización del rendimiento

$$\text{Maximizar } z_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(Pv_i - Pv_{\min}\right) \leq \lambda_1 \left(Pv_{\max} - Pv_{\min}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sigma_i - \sigma_{\min}\right) \leq \lambda_2 \left(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}\right)$$

$$x_i \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Donde x_i es el decimal de la acción i que debe comprarse y es una variable real $0 \leq x_i, \leq 1$, $x_i = 0$ cuando la acción no forma parte de la cartera de inversión. λ_1, λ_2: son variables que utilizamos para recorrer todo el espacio de soluciones y su valor es $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$, Pv_i es el precio de venta de la acción i.

3.2. El modelo de minimizar el riesgo es el siguiente:

$$\text{Minimizar } z_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(Pv_i - Pv_{\min}\right) \leq \lambda_1 \left(Pv_{\max} - Pv_{\min}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(R_i - R_{\min}\right) \geq \lambda_2 \left(R_{\max} - R_{\min}\right)$$

$$x_i \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Donde las variables son las mismas que en el problema de maximizar.

4. Selección de la cartera de inversión.

La selección de la cartera de inversión se hace para las acciones de tres empresas, con el objetivo de comparar nuestros resultados con los obtenidos por el modelo CAPM. La solución de los modelos matemáticos de maximización del rendimiento y minimización del riesgo se resuelven independientemente uno del otro con el método SIMPLEX, para lo cual se utilizó el programa winqsb.

De la página de Internet de la BMV se eligió las acciones de 3 diferentes empresas que regularmente se encuentran a la alza o entre las más negociadas. Los datos considerados de las acciones son de Julio del 2005 a Febrero de 2007, sus valores obtenidos con las ecuaciones (2) y (3) se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Rendimiento y riesgo de las empresas de julio 2005 a febrero 2007

	EMPRESA	**RENDIMIENTO %**	**PRECIO VENTA**	**RIESGO %**
X1	GMEXICOB	5.053%	76.00	9.289%
X2	WALMEX V	2.230%	39.67	5.985%
X3	G MODELOC	2.016%	59.11	5.381%

Es importante observar que el riesgo es mayor al rendimiento, lo que implica que el mayor rendimiento con el menor riesgo se encontrará cuando la diferencia entre ambas es la menor.

Resultados del problema de maximización del rendimiento

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 1 y en la tabla 2

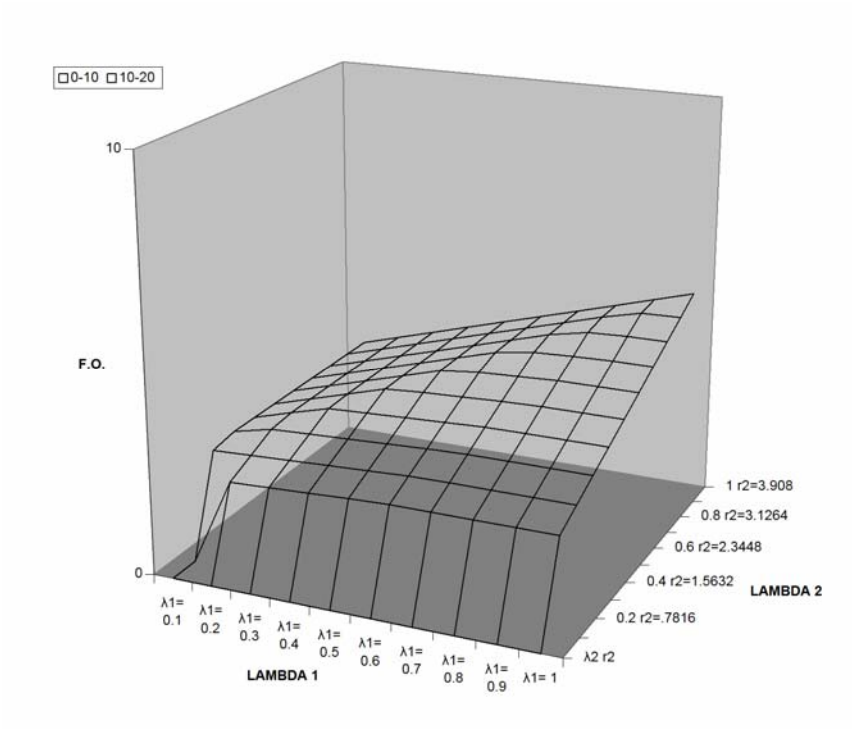

Figura 1. Gráfica del rendimiento óptimo para diferentes λ_1 y λ_2

Tabla 2 Rendimiento óptimo para diferentes λ_1 y λ_2

		$\lambda_1 = 0.1$	$\lambda_1 = 0.2$	$\lambda_1 = 0.3$	$\lambda_1 = 0.4$	$\lambda_1 = 0.5$	$\lambda_1 = 0.6$	$\lambda_1 = 0.7$	$\lambda_1 = 0.8$	$\lambda_1 = 0.9$	$\lambda_1 = 1$
λ_2	r2	F.O. r1=3.633	F.O. r1=7.266	F.O. r1=10.899	. r1=14.532	F.O. r1=18.165	F.O. r1=21.798	F.O. r1=25.431	O. r1=29.064	F.O. r1=32.697	F.O. r1=36.33
0.1	r2=.3908	IMPRACTICABLE	2.1591	2.2012	2.2433	2.2854	2.3197	2.3197	2.3197	2.3197	2.3197
0.2	r2=.7816	2.4012	2.4433	2.4854	2.5274	2.5695	2.6116	2.6234	2.6234	2.6234	2.6234
0.3	r2=1.1724	2.5123	2.7274	2.7695	2.8116	2.8536	2.8957	2.9271	2.9271	2.9271	2.9271
0.4	r2=1.5632	2.5123	2.7946	3.0536	3.0957	3.1378	3.1799	3.2219	3.2308	3.2308	3.2308
0.5	r2=1.9540	2.5123	2.7946	3.0769	3.3592	3.4219	3.4640	3.5061	3.5345	3.5345	3.5345
0.6	r2=2.3448	2.5123	2.7946	3.0769	3.3592	3.6415	3.7481	3.7902	3.8323	3.8382	3.8382
0.7	r2=2.7356	2.5123	2.7946	3.0769	3.3592	3.6415	3.9238	4.0744	4.1164	4.1419	4.1419
0.8	r2=3.1264	2.5123	2.7946	3.0769	3.3592	3.6415	3.9238	4.2061	4.4006	4.4426	4.4456
0.9	r2=3.5172	2.5123	2.7946	3.0769	3.3592	3.6415	3.9238	4.2061	4.4884	4.7268	4.7493
1	r2=3.908	2.5123	2.7946	3.0769	3.3592	3.6415	3.9238	4.2061	4.4884	4.7707	5.0530

Resultados del problema de minimización del riesgo
Los resultados se muestran en la figura 2 y en la tabla 3.

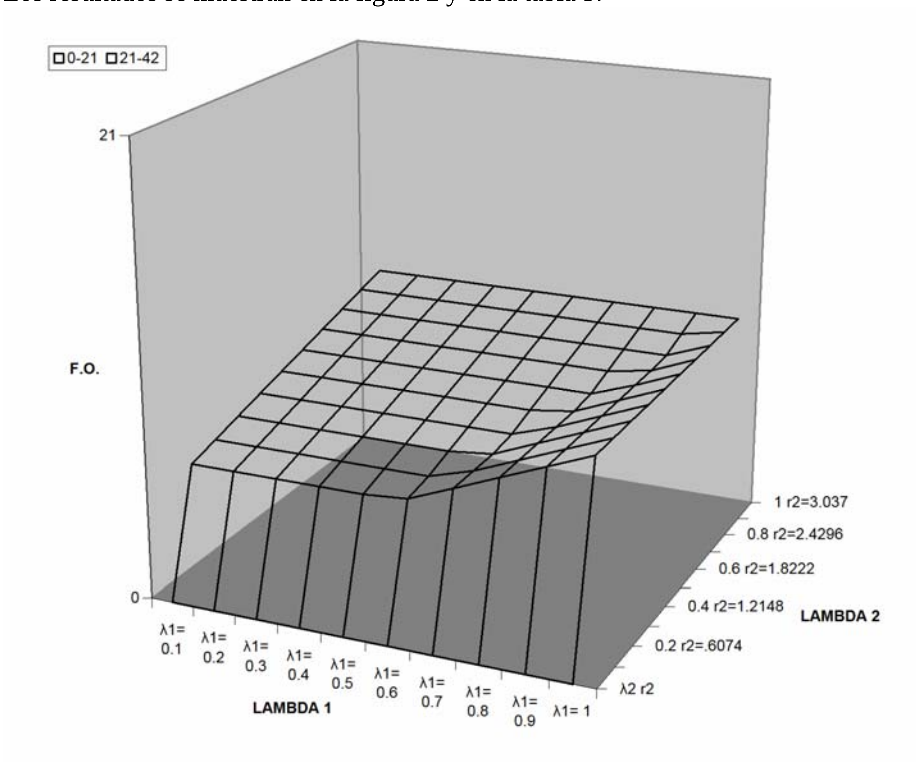

Figura 2. Gráfica del riesgo mínimo para diferentes λ_1 y λ_2

Tabla 3 Riesgo mínimo para diferentes λ_1 y λ_2

		λ_1= 0.1	λ_1= 0.2	λ_1= 0.3	λ_1= 0.4	λ_1= 0.5	λ_1= 0.6	λ_1= 0.7	λ_1= 0.8	λ_1= 0.9	λ_1= 1
λ_2	r2	F.O. r1=3.633	F.O. r1=7.266	F.O. r1=10.899	). r1=14.532	F.O. r1=18.165	F.O. r1=21.798	F.O. r1=25.431	F.O. r1=29.064	F.O. r1=32.697	F.O. r1=36.33
0.1	r2=.3037	5.7718	5.7718	5.7718	5.7718	5.7718	5.9266	6.7672	7.6078	8.4484	9.2890
0.2	r2=.6074	6.1626	6.1626	6.1626	6.1626	6.1626	6.1626	6.7672	7.6078	8.4484	9.2890
0.3	r2=.9111	6.5534	6.5534	6.5534	6.5534	6.5534	6.5534	6.7672	7.6078	8.4484	9.2890
0.4	r2=1.2148	6.9442	6.9442	6.9442	6.9442	6.9442	6.9442	6.9442	7.6078	8.4484	9.2890
0.5	r2=1.5185	7.3350	7.3350	7.3350	7.3350	7.3350	7.3350	7.3350	7.6078	8.4484	9.2890
0.6	r2=1.8222	7.7258	7.7258	7.7258	7.7258	7.7258	7.7258	7.7258	7.7258	8.4484	9.2890
0.7	r2=2.1259	8.1166	8.1166	8.1166	8.1166	8.1166	8.1166	8.1166	8.1166	8.4484	9.2890
0.8	r2=2.4296	8.5074	8.5074	8.5074	8.5074	8.5074	8.5074	8.5074	8.5074	8.5074	9.2890
0.9	r2=2.7333	8.8982	8.8982	8.8982	8.8982	8.8982	8.8982	8.8982	8.8982	8.8982	9.2890
1	r2=3.037	9.2890	9.2890	9.2890	9.2890	9.2890	9.2890	9.2890	9.2890	9.2890	9.2890

Con estos resultados aplicamos los criterios de selección del modelo CAPM para obtener la menor diferencia entre el rendimiento y el riesgo.
Con lo anterior, es importante notar, se determinan los valores de λ_1 y λ_2, pero en ambos problemas corresponde a diferentes porcentajes para cada una de las acciones.

En la figura 3 y en la tabla 4 se muestran los resultados de las diferencias entre el rendimiento y el riesgo.

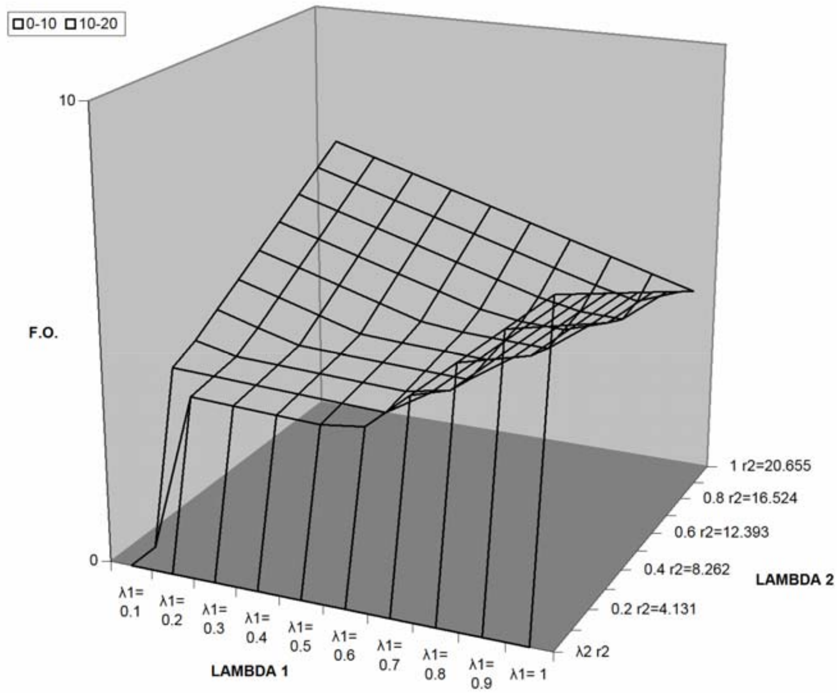

Figura 3. Gráfica de diferencias entre el rendimiento y riesgo

Tabla 4. Diferencias entre el riesgo y rendimiento

	$\lambda_1 = 0.1$	$\lambda_1 = 0.2$	$\lambda_1 = 0.3$	$\lambda_1 = 0.4$	$\lambda_1 = 0.5$	$\lambda_1 = 0.6$	$\lambda_1 = 0.7$	$\lambda_1 = 0.8$	$\lambda_1 = 0.9$	$\lambda_1 = 1$
r2	**F.O. r1=17.478**	**F.O. r1=34.956**	**F.O. r1=52.434**	**. r1=67.912**	**F.O. r1=87.39**	**F.O. r1=104.868**	**F.O. r1=122.346**	**r1=139.8240**	**F.O. r1=157.302**	**F.O. r1=174.78**
r2=2.066	#¡VALOR!	3.6127	3.5706	3.5285	3.4864	3.6069	4.4475	5.2881	6.1287	6.9693
r2=4.131	3.7614	3.7193	3.6772	3.6352	3.5931	3.5510	4.1438	4.9844	5.8250	6.6656
r2=6.197	4.0411	3.8260	3.7839	3.7418	3.6998	3.6577	3.8401	4.6807	5.5213	6.3619
r2=8.262	4.4319	4.1496	3.8906	3.8485	3.8064	3.7643	3.7223	4.3770	5.2176	6.0582
r2=10.328	4.8227	4.5404	4.2581	3.9758	3.9131	3.8710	3.8289	4.0733	4.9139	5.7545
r2=12.393	5.2135	4.9312	4.6489	4.3666	4.0843	3.9777	3.9356	3.8935	4.6102	5.4508
r2=14.459	5.6043	5.3220	5.0397	4.7574	4.4751	4.1928	4.0422	4.0002	4.3065	5.1471
r2=16.524	5.9951	5.7128	5.4305	5.1482	4.8659	4.5836	4.3013	4.1068	4.0648	4.8434
r2=18.59	6.3859	6.1036	5.8213	5.5390	5.2567	4.9744	4.6921	4.4098	4.1714	4.5397
r2=20.655	6.7767	6.4944	6.2121	5.9298	5.6475	5.3652	5.0829	4.8006	4.5183	4.2360

En la gráfica 3 se aprecia que existe un área donde la diferencia es mínima, mientras que en la tabla 4 se determinan los valores de λ_1 y λ_2 para esa diferencia. Los valores de esas variables corresponden a diferentes porcentajes de cada una de las acciones. Los valores se muestran en la tabla 5 para los dos problemas y el porcentaje determinado con el modelo CAPM.

Tabla 5. Comparación de los resultados del modelo matemático y el CAPM

Modelo		X_1	X_2	X_3	Sumas	Diferencias
Minimización del riesgo	Contribución	10%	0.0%	90%	100%	
	REND	0.505%	0.000%	1.814%	2.320%	3.452%
	RIESGO	0.929%	0.000%	4.843%	5.772%	
Maximización del rendimiento	Contribución	7.92%	13.44%	78.64%	100%	
	REND	0.400%	0.300%	1.585%	2.285%	3.486%
	RIESGO	0.736%	0.804%	4.232%	5.772%	
CAPM	Contribución	30%	40%	30%	100%	
	REND	1.5159%	0.892%	0.6048%	3.0127%	1.9712%
	RIESGO	------	-----	-----	4.9839%	
CAPM con valor real del riesgo al momento t=0	Contribución	30%	40%	30%	100%	
	REND	1.5159%	0.8920%	0.6048%	3.0127%	3.7823%
	RIESGO	2.7867%	2.3940%	1.6143%	6.7950%	

Los resultados de la tabla 5 nos muestran que el considerar la covarianza como variable para determinar una cartera de inversión no es la mejor, ya que al tiempo t=0 el riesgo de la cartera de inversión, calculada con las proporciones de los riesgos actuales de cada acción, es mayor que la estimada por las fórmulas estadísticas y los modelos de optimización lineal. Su valor es tan grande que esa cartera de inversión no es una opción favorable cuando calculamos la mejor cartera por medio de la optimización lineal. Incluso con ese valor de riesgo es posible obtener rendimientos mayores, lo que se puede comprobar en las tablas de resultados previas.

Los resultados también nos muestran que la mejor opción es determinar el mínimo riesgo, porque ahí se determina la menor diferencia. Además, es importante notar que los porcentajes de riesgo y rendimiento son muy similares para los dos problemas.

Conclusiones

Se puede concluir que el planteamiento de los modelos matemáticos, maximización del rendimiento y minimización del riesgo, y los criterios para elegir una cartera de inversión nos proporciona los resultados suficientes para seleccionar los porcentajes de compra de las acciones que forman una cartera de inversión.

El procedimiento de la selección de una cartera de inversión por medidas estadísticas se complementa con los modelos de optimización lineal, y es posible tener más elementos para seleccionar las acciones a invertir.

Los resultados nos muestran que la restricción de la selección del precio de venta de la acción es acertada y útil para modelar matemáticamente problemas de inversión en la Bolsa Mexicana de Valores.

Referencias

[1] Domingo Jorge Messuti , Alvarez Victor Adrián, Romano Graff Hugo. Selección de inversiones. Introducción a la teoría de la cartera. Buenos Aires, Argentina. Ed. Macchi. 1992. 550 pp. 135-137, 147-151, 175-187

[2] Hillier Frederick S., Lieberman Gerald J. Introducción a la Investigación de Operaciones. Ed. Mc Graw Hill pp. 24-44

[3] Mendizábal Zubeldia Alaitz, Miera Zabalza Luis M., Zubia Zubiaurre Marian. El modelo de Markowitz en la Gestión de Carteras. Universidad del País Vasco- Euskal Erico Unibertsitatea. http://www.ehu.es/cuadernosdegestion/documentos/212.pdf

[4] Mathur Kamlesh , Solow Daniel. Investigación de Operaciones. Ed. Prentice Hall pp.2-9 y 74-79

[5] Saavedra Ma. Luisa. Aplicación empírica del modelo Black & Scholes en México. Artículo de la revista de Contaduría y Administración de la UNAM Num. 217, 2006

[6] Bravo Orellana Sergio. Profesor ESAN (Escuela Superior de Administración y Negocios en Lima, Perú). Determinación de Portafolios de Activos Financieros, la Frontera Eficiente y la Línea de Mercado. http://www.esan.edu.pe/paginas/extras/paper1.pdf

[7] Krajewski Lee J., Ritzman Larry P. Administración de operaciones (Estrategia y Análisis). Quinta edición, Ed. Prentice Hall México 2000, ISBN:968-444-411-7, pp. 636-663

[8] Bolsa Mexicana de Valores. http://www.bmv.com.mx

[9] José Crispín Zavala-Díaz, Vladimir Khachaturov "Programación entera, el método del árbol de cubos, su algoritmo paralelo y sus aplicaciones" Contextos en la investigación de las Ciencias Sociales y Administrativas, Primera edición 2006, ISBN: 968-878252-1. pp77-102.

[10] Mark L. Berenson, David M Levine. "Estadística para Administración y Economía, Conceptos y Aplicaciones". Ed. McGraw-Hill 1991 ISBN: 968-422-713-2.