

Solución de un Problema Inverso de Conducción de Calor mediante Redes Neuronales Artificiales

Obed Cortés¹, José Alfredo Hernández¹, Leonel Lira², y Gustavo Urquiza¹

¹Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Cuernavaca, Mor.
ocortez@uaem.mx
alfredo@uaem.mx
gurquiza@uaem.mx

²Centro Nacional de Metrología Queretaro, Quer.
llira@cenam.mx

Abstract. En los últimos años ha habido un auge en la solución de problemas inversos de conducción de calor (PICC), existiendo diversas técnicas que han resultado exitosas (Método de Levenberg-Marquardt, Método del Gradiente Conjugado,...). En este trabajo desarrollamos una técnica de solución de un PICC de estimación de la función de generación de calor mediante la implementación de una red neuronal *feedforward backpropagation*. Se perturbaron las condiciones iniciales en la solución analítica y en la técnica neuronal, obteniendo resultados satisfactorios con los datos experimentales. Para validar el modelo neuronal se comparó con los resultados de los métodos de Levenberg-Marquardt y del Gradiente Conjugado en la solución del PICC. Como resultado se obtuvo que las tres técnicas arrojan resultados muy cercanos al experimental ($r^2 > 0.98$). Sin embargo, la red neuronal ocupa menos tiempo de cálculo que con fines de automatización de proceso es la óptima.

1. Introducción

En este proyecto describimos una técnica de solución mediante redes neuronales artificiales aplicada al problema inverso de conducción de calor de determinar el valor de la generación de calor en una placa caliente de un aparato para medir la conductividad térmica de materiales aislantes, a partir de los valores transitorios de la temperatura medidos en un punto de la placa caliente. La red utilizada es una *feedforward* con *backpropagation*. Nuestras simulaciones prueban las ventajas y desventajas de utilizar este método.

2. El Problema Inverso

El problema directo consiste en un cilindro sólido con condición de frontera de tercera clase con una condición de temperatura inicial constante y una fuente de generación de calor (g , en Watts) en el interior posicionada en $r_1 = 0.0538$ m. La formulación matemática de este problema está dada por la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{g \cdot \delta(r-r_1)}{2\pi kr} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} & 0 < r < b, & \quad t > 0 \\ k \frac{\partial T}{\partial r} + hT &= hT_a & r = b, & \quad t > 0 \\ T &= T_0 & 0 \leq r \leq b, & \quad t = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

La solución para este problema se obtiene mediante el método de transformada integral [4]. La solución es la siguiente:

$$\begin{aligned} T(r, t) &= \frac{hbT_0}{k\beta^2 N} R_0(\beta, r) R_0(\beta, b) e^{-\alpha\beta^2 t} \\ &+ \frac{hbT_a}{k\beta^2 N} R_0(\beta, r) R_0(\beta, b) (1 - e^{-\alpha\beta^2 t}) \\ &+ \frac{g}{2\pi k\beta^2 N} R_0(\beta, r) R_0(\beta, r_1) (1 - e^{-\alpha\beta^2 t}) \end{aligned} \quad (2)$$

donde $R_0(\square, r) = J_0(\square r)$ son las eigenfunciones asociadas al problema de eigenvalor

$$\beta k J_1(\beta b) - h J_0(\beta b) = 0 \quad (3)$$

y N representa la *normalización integral* o *norma* dada por

$$N = \frac{b^2 (h^2 + \beta^2 k^2)}{2k^2 \beta^2} R_0^2(\beta, b) \quad (4)$$

En este proyecto presentamos un método para obtener la solución inversa usando la técnica de redes neuronales artificiales. Esto es, tratamos de recuperar el valor de la generación de calor conociendo únicamente el campo de temperaturas.

3. Arquitectura de la Red Neuronal

Las redes neuronales artificiales (RNA) están compuestas por arreglos de elementos de procesamiento (neuronas). El modelo de neurona artificial consiste básicamente de un combinador lineal seguido por una función de activación. Los arreglos de tales unidades forman las RNA's que se caracterizan por:

1. Elementos de procesamiento bastante simple tipo neurona.
2. Conexiones ponderadas entre los elementos de procesamiento (donde se almacena el procesamiento).

3. Control distribuido y procesamiento altamente paralelo.
4. Aprendizaje automático de representaciones internas.

Las RNA's tienen como objetivo explorar las redes masivamente paralelas de elementos simples para llegar a un resultado en una porción de tiempo demasiado pequeña y, al mismo tiempo, sin sensibilidad a las pérdidas y fallas de algunos de los elementos de la red. Estas propiedades hacen de las RNA's apropiadas para su aplicación en reconocimiento de patrones, procesamiento de señales, procesamiento de imágenes, finanzas, visión por computadora, ingeniería, etc. [1], [2] y [3].

El modelo más simple de RNA es el perceptrón de una sola capa con una función de activación de limitación fuerte (*hard-limit*), la cual es apropiada para resolver problemas lineales. Existen diferentes arquitecturas de RNA's que son dependientes de la estrategia de aprendizaje adoptada. Aquí describimos brevemente la RNA utilizada en las simulaciones: el perceptrón multicapa con aprendizaje de retropropagación (*backpropagation*). Una introducción detallada sobre las RNA's se puede encontrar en [2].

Los perceptrones multicapa con algoritmo de aprendizaje de retropropagación, comúnmente llamados redes neuronales de retropropagación, son redes *feedforward* compuestas de una capa de entrada, una capa de salida y varias capas ocultas, cuyo objetivo es extraer una estadística de alto orden a partir de los datos de entrada. La Fig. 1 representa una red neuronal de retropropagación con una capa oculta. Las funciones f y g suministran la activación para las neuronas de la capa oculta y de la capa de salida, respectivamente. Las redes neuronales solucionarán problemas no lineales si se utilizan funciones de activación no lineales en las capas ocultas y/o de entrada. La Fig. 2 muestra algunos ejemplos de tales funciones.

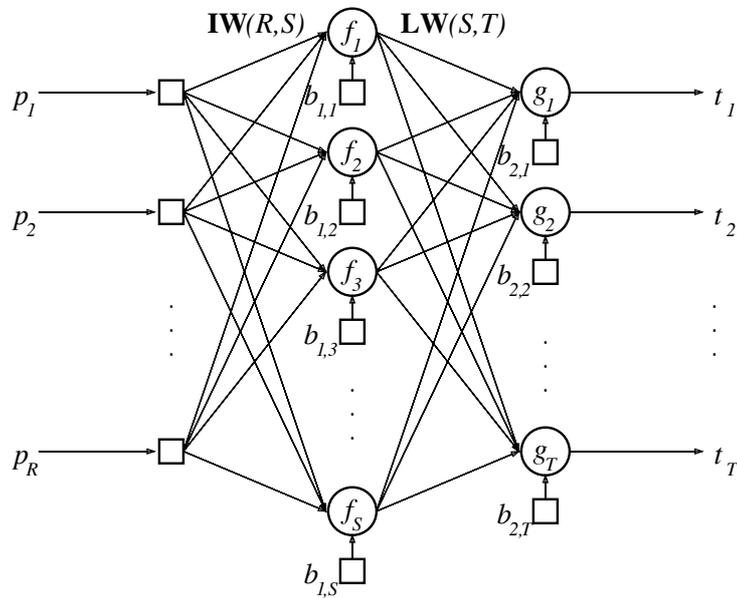
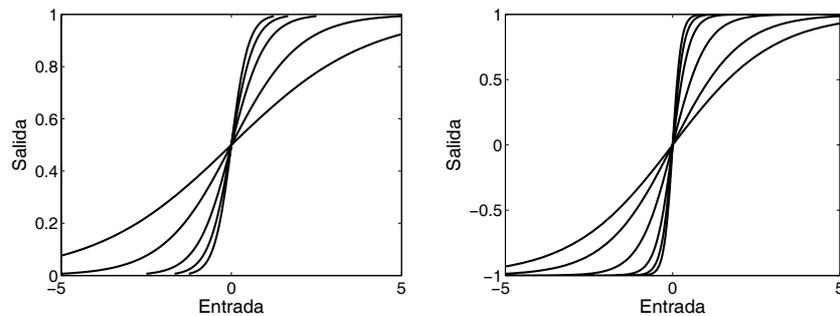


Fig. 1. Red neuronal de retropropagación con una capa oculta.

o

**Fig. 2.** Funciones de activación no lineales

Las conexiones entre las diferentes neuronas (Fig. 1) tienen pesos asociados que se ajustan durante el proceso de aprendizaje, cambiando de esa manera el funcionamiento de la red. Se pueden elaborar dos distintas fases al utilizar una RNA: la fase de entrenamiento (proceso de aprendizaje) y la fase de ejecución (activación de la red). La fase de entrenamiento consiste en ajustar los pesos para un mejor rendimiento de la red en el establecimiento del mapeo de varios pares de vectores entrada/salida. Una vez que se ha entrenado, se fijan los pesos y la red puede usarse con nuevas entradas para las cuales calculará las correspondientes salidas, basándose en lo que ha aprendido.

El entrenamiento de retropropagación es un algoritmo de aprendizaje supervisado que requiere tanto de los datos de la entrada como de los de la salida (deseada). Estos pares permiten el cálculo del error de la red como la diferencia entre la salida calculada y el vector deseado. Los ajustes a los pesos se realizan mediante retropropagar tal error a la red siguiendo una regla de cambio.

4. Red Neuronal para Calcular la Generación de Calor

Las RNA's tienen dos etapas en su aplicación, los pasos de aprendizaje y de activación. Durante la etapa de aprendizaje, los pesos y las bias correspondientes a cada conexión son ajustados utilizando diferentes valores de g en la solución (2) del problema directo (1). En la Fig. 3 se muestran las distribuciones de temperatura que se utilizaron para entrenar la red con línea sólida y con marcadores "+" las distribuciones que se utilizaron para validar la red. Para el entrenamiento se utilizaron valores de $g = 0.5n$ con $n = 1, \dots, 19$ y para la validación $g = n\pi/3$ para $n = 1, \dots, 4$. Los marcadores "o" representan la distribución de temperaturas medida experimentalmente para un valor de $g = 5$. Para este problema utilizamos una red neuronal con 25 entradas (las temperaturas perturbadas a intervalos de 1500 segundos), una capa oculta de tres neu-

ronas con función tangencial sigmoïdal y una capa de salida de una neurona con función lineal.

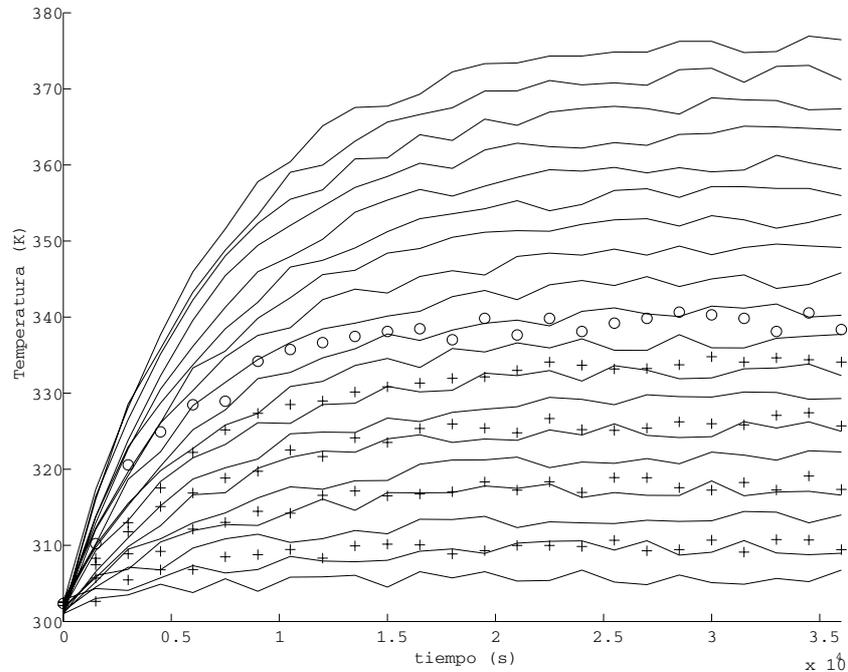


Fig. 3. Distribuciones de temperatura utilizadas

La prueba de activación es un procedimiento importante para indicar el rendimiento de una RNA, la prueba efectiva se realiza utilizando datos distintos a los utilizados durante el entrenamiento. Esta acción se llama *prueba de generalización* de la RNA. Para la prueba de generalización utilizamos 4 distribuciones de temperaturas perturbadas. En la Fig. 4 se muestra el resultado de la simulación del entrenamiento y de la validación.

5. Simulación Utilizando Datos Medidos y Perturbados

La simulación utilizando datos medidos experimentalmente así como datos perturbados con un intervalo de ± 1 Kelvin de error se realizaron para evaluar la precisión del modelo de red neuronal artificial multicapa. Los resultados se muestran en la Tabla 1. Podemos ver que los resultados obtenidos con la red neuronal han mejorado los obtenidos con el Método de Levenberg-Marquardt y el Método del Gradiente Conjugado reportados por [5].

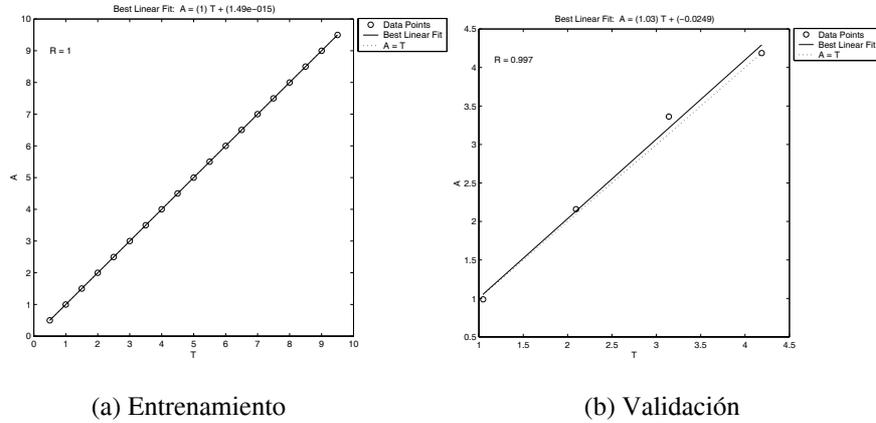


Fig. 4. Análisis de regresión lineal.

6. Conclusiones

Hemos utilizado una RNA multicapa con retropropagación para recuperar el valor de la función de generación de calor en una placa caliente de un aparato para medir conductividades térmicas de materiales aislantes. Los resultados son satisfactorios ya que hemos mejorado la estimación de la función de generación de calor en comparación con otros métodos utilizados. Esto nos permite pensar en la utilidad de las redes neuronales para resolver problemas inversos de conducción de calor.

Table 1. Error obtenido con valores perturbado y medidos

	g	error	ecp
Perturbado	3.285714285714	0.199169876650389	0.039668639764931
Perturbado	3.571428571429	0.389514890236134	0.151721849715667
Perturbado	3.857142857143	0.006236882166744	0.000038898699162
Perturbado	4.142857142857	0.031328934615104	0.000981502144117
Medido	5.000000000000	0.015185404912013	0.000230596522342
Reportado [5]	5.000000000000	0.019931502831166	0.000397264805109

7. Referencias

1. Hagan, M. T., H. B. Demuth y M. H. Beale, *Neural Network Design*, Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 1995.
2. Haykin, S., *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*, Prentice-Hall, New Jersey, 1999.
3. *MATLAB Neural Network Toolbox*, MathWorks Inc., 2006.

4. Özisik, N., *Boundary Value Problems of Heat Conduction*, Dover, New York, 1989.
5. Cortés, O., “*Aplicación del Método de Levenberg-Marquardt y del Gradiente Conjugado en la estimación de la generación de calor de un Aparato de Placa Caliente con Guarda*”, Tesis de Maestría, CENIDET, Cuernavaca, Mor., México, Mayo 2004.